17/11/2020

Παράδειγμα

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Να βρεθούν ~~τα~~ ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα & οι ιδιοτιμές.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-1\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}+(-2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-1(-2-\lambda)+(-\lambda-2)\left[(-\lambda-2)^2-1\right]$$

$$=(\lambda+2)-(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+4-1)$$

$$=-(\lambda+2)(-1+\lambda^2+4\lambda+3)$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+2)$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda-(2+\sqrt{2}))(\lambda-(2-\sqrt{2}))$$

$\Delta=16-8=8$

$$\lambda=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{2}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-2+\sqrt{2},\ \lambda_3=-2-\sqrt{2}$

$\lambda=-2$

$$A+2I=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Λύσεις του ομογενούς $(A+2I)x=0$

$x_2=0,\quad x_1=-x_3,\quad x_3\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ x_3\in\mathbb{R},\ x_3\neq0\right\}$

Ιδιόχωρος: $E_{\lambda_1}=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{Nul}(A+2I)$

$\Rightarrow$ Παντα το ομογενες συστημα $\Rightarrow$ παντα ∞ λυσεις

$\boxed{\lambda_2 = -2\sqrt{2}}$

$$A - (-2+\sqrt{2})I = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2}x_3$

$x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 + \sqrt{2}x_2$

$\Rightarrow x_1 = -x_3 + 2x_3$

$x_1 = x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανυσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; x_3 \neq 0 \right\}$

Ιδιοχωρος: $E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\lambda_3 = -2-\sqrt{2}}$

$$A - (-2-\sqrt{2})I = A + (2+\sqrt{2})I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2}x_3$

$x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}x_2 - x_3 = 2x_3 - x_3 = x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R},\ x_3 \neq 0 \right\}$

Ιδιοχώρος: $E_{\lambda_3} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ορισμός: Έστω δυο $n \times n$ πίνακες A, B.
Ο A λέγεται όμοιος με τον B αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$A = PBP^{-1}$$

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow AP = PBP^{-1}P = PB$$
$$\Rightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PB = B$$
$$\Rightarrow B = P^{-1}AP$$

Άρα A όμοιος με τον $B \Rightarrow B$ όμοιος με τον A

Παρατήρηση: Οι όμοιοι πίνακες έχουν ίδια ορίζουσα

- Έστω $A = PBP^{-1}$

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det P \cdot \det B \cdot \det P^{-1}$$
$$= \det P \cdot \det B \cdot \frac{1}{\det P} = \det B$$

end.

Αποδεικνύεται ότι έχουν ίδια τάξη και μηδενικότητα

Θεώρημα: Αν A και B όμοιοι $n \times n$ πίνακες τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (λαμβάνοντας υπόψιν την αλγεβρική πολλαπλότητα).

Απόδειξη: - Έστω $A = PBP^{-1} \Rightarrow B = P^{-1}AP$

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1} I P$$
$$= P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P$$
$$= P^{-1}(AP - (\lambda I)P)$$
$$= P^{-1}(A - \lambda I)P$$

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \det P$$
$$= \det(A - \lambda I)$$
$$\det(B - \lambda I) = 1 \quad \det(A - \lambda I)$$

$\Rightarrow$

Άρα οι A, B έχουν το ίδιο χαρ. πολυώνυμο.
(άρα ίδιες ιδιοτιμές με ίδια πολλαπλότητα).

Επιδιαφορολογούμε για ομοιότητα με διαγώνιο πίνακα

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Έχουμε $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$ (γιατί;)

Άρα A όμοιο με D
Άρα $\det A = 15 = \det D$

ιδιοτιμές του A = ιδιοτιμές του D $= [3, 5]$

Επίσης $A^k = P D^k P^{-1}$ και $D^k = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

Ορισμός:

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται διαγωνοποιήσιμος ή διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα

Θεώρημα Διαγωνοποιησίμου πίνακα

Για ένα $n \times n$ πίνακα A, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1) Ο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

2) Ο A είναι ένας διαγωνοποιήσιμος

Μάλιστα αν $A = PDP^{-1}$ όπου D διαγώνιος πίνακας τότε ο P έχει ως στήλες n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A και τα στοιχεία του D είναι ιδιοτιμές του A

Απόδειξη ② ⇒ ① ⇒ Έστω A διαγωνοποιήσιμος με $A = PDP^{-1}$, D διαγώνιος.

$\Rightarrow AP = PD$

Έστω $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$

$AP = [Ap_1 \quad Ap_2 \ \ldots \ Ap_n]$

και αν $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots \\ 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ τότε $DP = [\lambda_1 p_1 \quad \lambda_2 p_2 \ldots \lambda_n p_n]$

Εφόσον $AP = DP \Rightarrow Ap_1 = \lambda_1 p_1,\ Ap_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, Ap_n = \lambda_n p_n$

$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow p_1 \text{ ιδιοδιανύσματα του } A \\ p_2 \quad \text{«} \quad A \\ \vdots \\ p_n \quad \text{«} \quad A \end{cases}$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ γραμμ. ανεξάρτητα ως στήλες του αντιστρέψιμου πίνακα P

① ⇒ ② Έστω $p_1, p_2, \ldots, p_n$ γραμμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A

Έστω $P = [p_1, p_2 \ldots p_n]$

Λόγω γραμμ. ανεξαρτησίας, P αντιστρέψιμος

Και $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ \vdots & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Τότε βρίσκουμε όπως πριν το $AP = DP$