17/11

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και ιδιοχώροι.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2-\lambda) + (-2-\lambda)\left[(-2-\lambda)^2 - 1\right] =$$

$$= (\lambda+2) - (\lambda+2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1)$$

$$= -(\lambda+2)(-1 + \lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$$

$$\Delta = b^2 - 4\alpha\gamma = 16 - 8 = 8$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2+\sqrt{2}$, $\lambda_3 = -2-\sqrt{2}$

$$\boxed{\lambda_1 = -2} \Rightarrow A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_3]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύσεις του ομογενούς $(A+2I)x = 0 \Rightarrow x_2 = 0$, $x_1 = -x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R},\ x_3 \neq 0 \right\}$

Ιδιοχώρος: $E_{\lambda_1} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Null}(A+2I)$

$\boxed{\lambda_2 = -2+\sqrt{2}}$: $A - (-2+\sqrt{2})I = A + (2-\sqrt{2})I =$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2}x_3$

$\Rightarrow x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 + \sqrt{2}x_2 = -x_3 + 2x_3 = x_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \neq 0 \right\}$

Ιδιοχώροι: $E_{\lambda_2} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\lambda_3 = -2-\sqrt{2}}$: $A - (-2-\sqrt{2})I = A + (2+\sqrt{2})I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = -\sqrt{2}x_3$

$\Rightarrow x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 - \sqrt{2}x_2 = 2x_3 - x_3 = x_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R}, \, x_3 \neq 0 \right\}$

Ιδιοχώρος: $E_{\lambda 3} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ορισμός:
Έστω δύο nxn πίνακες A, B. Ο A λέγεται όμοιος με τον B αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε:

$$\boxed{A = PBP^{-1}}$$

$$A = PBP^{-1} \iff AP = PBP^{-1}P = PB$$
$$\iff P^{-1}AP = P^{-1}PB = B$$
$$\iff B = P^{-1}AP$$

Άρα A όμοιος με τον B $\iff$ B όμοιος με τον A.

Παρατήρηση: Οι όμοιοι πίνακες έχουν ίδια ορίζουσα.

Έστω $A = PBP^{-1}$

$$\det A = \det(PBP^{-1}) = \det P \cdot \det B \cdot \det P^{-1}$$
$$= \det P \cdot \det B \cdot \frac{1}{\det P} = \det B$$

Αποδεικνύεται ότι έχουν ίδια τάξη και μηδενικότητα.

Θεώρημα:
Αν A και B όμοιοι nxn πίνακες τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (λαμβάνοντας υπόψιν την αλγεβρική πολλαπλότητα)

Απόδειξη:

Έστω $A = PBP^{-1} \Leftrightarrow B = P^{-1}AP$

$$\Leftrightarrow B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP =$$
$$= P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P =$$
$$= P^{-1}(AP - \lambda IP) = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

$$\det(B - \lambda I) = \det P^{-1}(A - \lambda I)P =$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P =$$
$$= \det(A - \lambda I)$$
$$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

Άρα οι A, B έχουν ίδιο χαρ. πολυώνυμο. (άρα ίδιες ιδιοτιμές με ίδια πολλαπλότητα).

Ενδιαφερόμαστε για ομοιότητα με διαγώνιο πίνακα

π.χ $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Έχουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$ (γιατί;)

Άρα A όμοιος με D

Άρα $\det A = 15 = \det D$

Ιδιοτιμές του A = Ιδιοτιμές του $D = [3, 5]$

Επίσης $A^k = P \cdot D^k P^{-1}$ και $D^k = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

Ορισμός:

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται διαγωνιοποιήσιμος ή διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα Διαγωνοποιήσιμου πίνακα:

Για έναν $n \times n$ πίνακα A, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Ο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
2. Ο A είναι ένας διαγωνοποιήσιμος.

Μάλιστα, αν $A = PDP^{-1}$ όπου D διαγώνιος πίνακας, τότε ο P έχει ως στήλες n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A και τα στοιχεία του D είναι ιδιοτιμές του A.

Απόδειξη:

2 ⇒ 1 Έστω A διαγωνοποιήσιμος με $A = PDP^{-1}$, D διαγώνιος

$\Leftrightarrow AP = PD$

Έστω $P = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n]$

$AP = [AP_1 \quad AP_2 \quad \dots \quad AP_n]$

και αν $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, τότε

$DP = [\lambda_1 P_1 \quad \lambda_2 P_2 \quad \dots \quad \lambda_n P_n]$

Εφόσον $AP = DP \Rightarrow AP_1 = \lambda_1 P_1,\ AP_2 = \lambda_2 P_2, \dots, AP_n = \lambda_n P_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \\ P_2 \text{ — '' — } A \\ \vdots \\ P_n \text{ — '' — } A \end{cases}$$

$P_1, P_2, \dots, P_n$ γραμμ. ανεξάρτητα ως στήλες του αντιστρέψιμου πίνακα P.

1 ⇒ 2 Έστω $P_1, P_2, \dots, P_n$ γραμμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Έστω $P = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n]$

Λόγω γραμμ. ανεξαρτησίας, P αντιστρέψιμος. Αν $AP_1 = \lambda_1 P_1$, $AP_2 = \lambda_2 P_2$, ..., $AP_n = \lambda_n P_n$ και $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, τότε βρίσκουμε όπως πριν ότι $AP = DP$.