17/11/20 **Παράδειγμα** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοχώροι:

• $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-\lambda-2)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(-2-\lambda) + (-\lambda-2)\left[(-\lambda-2)^2 - 1\right]$

$= (\lambda+2) - (\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda-4-1) = -(\lambda+2)(-1+\lambda^2+4\lambda+3)$

$= -(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+2) = -(\lambda+2)(\lambda-(2+\sqrt{2}))(\lambda-(2-\sqrt{2}))$

• **ιδιοτιμές:** $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2+\sqrt{2}$, $\lambda_3 = -2-\sqrt{2}$

• $\Delta = 16-8 = 8 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \boxed{2 \pm \sqrt{2}}$

• $A+2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• **Λύσεις** της ομογενούς $(A+2I)x = 0$:

$x_2 = 0$, $x_1 = -x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

• Ιδιοδιανύσματα: $\left\{x_3 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R}, x_3 \neq 0\right\}$

• ιδιοχώρος: $E_{\lambda_1} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{Null}(A+2I)$

→ • $\lambda_2 = -2+\sqrt{2}$

• $A-(-2+\sqrt{2})I = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}&1&0\\1&-\sqrt{2}&1\\0&1&-\sqrt{2}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&1\\-\sqrt{2}&1&0\\0&1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&1\\0&-1&+\sqrt{2}\\0&1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ • $\cancel{(-4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2}) = -18-8\sqrt{2}}$

$\sim \begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&1\\0&1&-\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ • $x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2}x_3$

• $x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 + \sqrt{2}x_2 = -x_3 + 2x_3$
$= x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \neq 0 \right\}$

- Ιδιοχώρος: $E_{\lambda_2} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

→ • $\lambda_3 = -2 - \sqrt{2}$

$$A - (-2-\sqrt{2}) I = A + (2+\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $x_2 + \sqrt{2} x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} x_3$
- $x_1 + \sqrt{2} x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} x_2 - x_3 = 2x_3 - x_3 = x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\ } \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R}, x_3 \neq 0 \right\}$

- Ιδιοχώρος: $E_{\lambda_3} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ορισμοί: Έστω δύο $n \times n$ πίνακες A, B.

Ο A λέγεται όμοιος με τον B αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε: $A = PBP^{-1}$

- $A = PBP^{-1} \Rightarrow B = P^{-1}AP$

- Άρα A όμοιος με τον B $\Leftrightarrow$ B όμοιος με τον A.

- **Παρατήρηση:** Οι όμοιοι πίνακες έχουν ίδια ορίζουσα

→ Έστω $A = PBP^{-1}$

$$\det A = \det(PBP^{-1}) = \det P \cdot \det B \cdot \det P^{-1}$$
$$= \det P \cdot \det B \cdot \frac{1}{\det P} = \det B$$

→ **Αποδεικνύεται ότι έχουν ίδια τάξη και μηδενικότητα.**

- **Θεώρημα:** Αν A και B όμοιοι $n \times n$ πίνακες τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (λαμβάνοντας υπόψιν την αλγεβρική πολλαπλότητα)

→ **Απόδειξη:** - Έστω $A = PBP^{-1} \Leftrightarrow B = P^{-1}AP$

$$\Rightarrow B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP$$
$$= P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P = P^{-1}(AP - (\lambda I)P)$$
$$= P^{-1}(A - \lambda I)P$$

$\det(B-\lambda I) = \dots = \det(A-\lambda I)$

$\Rightarrow \det + (B-\lambda I) = \det(A-\lambda I)$

Άρα οι A, B έχουν το ίδιο χαρ. πολυώνυμο.
(άρα ίδιες ιδιοτιμές με ίδια πολλαπλότητα.)

• Ενδιαφερόμαστε για όμοιότητα με διαγώνιο πίνακα

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

• Έχουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$ (γιατί);

• Άρα A όμοιος με τον D

• Άρα $\det A = 15 = \det D$

$\rightarrow$ ιδιοτιμές του A = ιδιοτιμές του D = $[3, 5]$

Επίσης $A^k = PD^kP^{-1}$ και $D^k = \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται διαγωνιοποιήσιμος ή διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα

Θεώρημα διαγωνοποιήσιμου πίνακα

→ Για έναν $n \times n$ πίνακα A, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) Ο A έχει n γραμμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

2) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Μάλιστα, αν $A = PDP^{-1}$ όπου D διαγώνιος πίνακας τότε ο P έχει ως στήλες τα n γραμμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A και τα στοιχεία του D είναι οι ιδιοτιμές του A.

Απόδειξη: (2) ⇒ (1) - Έστω A διαγωνοποιήσιμος με
$A = PDP^{-1}$, D διαγώνιος
$\Leftrightarrow AP = DP$

Έστω $P = [P_1 \; P_2 \dots P_n]$
τότε $AP = [AP_1 \; AP_2 \dots AP_n]$
και αν $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ τότε

$DP = [\lambda_1 P_1 \; \lambda_2 P_2 \dots \lambda_n P_n]$

- Εφόσον, $AP = DP \Rightarrow AP_1 = \lambda_1 P_1$, $AP_2 = \lambda_2 P_2$, ..., $AP_n = \lambda_n P_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 \text{ ιδιοδιάνυσμα του } A \\ P_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad A \\ \vdots \\ P_n \quad \text{"} \quad \text{"} \quad A \end{cases}$$

• $p_1, p_2 \ldots p_n$ γραμ. ανεξάρτητα ως στήλες του αντιστρέψιμου πίνακα P τετράγωνο

① => ② - Έστω $p_1, p_2, \ldots p_n$ γραμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Έστω $P = [p_1 \ p_2 \ldots p_n]$

• Λόγω γραμ. ανεξαρτησίας, P αντιστρέψιμος.

Αν $Ap_1 = \lambda_1 p_1$, $Ap_2 = \lambda_2 p_2 \ldots Ap_n = \lambda_n p_n$

και $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

τότε βρίσκουμε όπως πριν ότι $AP = DP$