20/11

Υπενθύμιση:
A όμοια με B αν υπάρχει αντιστρέψιμος P ώστε $A = PBP^{-1}$

Αν A,B όμοιοι έχουν:
- ίδια ορίζουσα
- ίδια τάξη και μηδενικότητα
- ίδιες ιδιοτιμές και πολλαπλότητες.

A διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα

Θεώρημα:
A nxn πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος
$\Longleftrightarrow$ έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

$A = PDP^{-1}$ όπου $D = \begin{pmatrix} \text{ιδιο} & 0 \\ 0 & \text{τιμές} \end{pmatrix}$

D = [ιδιοτιμές] σε στήλες.

Υπενθύμιση:
Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές είναι γρ. ανεξάρτητα.

Θεώρημα:
Ένας nxn πίνακας με n διακριτές ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος.
Για διαγωνοποίηση πρέπει πρώτα να βρούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Παραδείγματα:

1) Να εξεταστεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Από προηγούμενο παράδειγμα έχουμε βρει ότι η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα είναι: $-(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 2$ με πολλαπλότητα 2
$\lambda_2 = 1$ — " — 1.

Βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Άρα τα $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Από το Θεώρημα Διαγωνοποιήσιμου πίνακα, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

οπότε αν $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, βρίσκουμε ότι

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Σημείωση:
$A = PDP^{-1}$
$\Leftrightarrow P^{-1}AP = D$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

2) Το ιδιογιατον $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$ με πολλαπλότητα 1

$\lambda_2 = 2$ — " — 2

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$[A-I|0] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{8}x_3, \quad x_2 = -\frac{1}{8}x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -1/8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$

$$[A-2I|0] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Τελικά ο πίνακας A έχει 2 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

3) Το ίδιο για τον $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5,\ \lambda_4 = -2$

A 4x4 πίνακας με 4 διακριτές ιδιοτιμές άρα διαγωνοποιήσιμος.

Δυνάμεις Διαγωνοποιήσιμων Πινάκων:

Έστω A διαγωνοποιήσιμος nxn πίνακας με

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}A)\cdot(PP^{-1})(AP) =$$
$$= (P^{-1}A)(AP) = P^{-1}(AA)P =$$
$$= P^{-1}A^2P$$

Αποδεικνύεται ότι για κάθε κ θετικός ακέραιος $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$

Επίσης $D = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Άρα $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$

$\Rightarrow D^k = P^{-1}A^kP$

$\Rightarrow \boxed{PD^kP^{-1} = A^k}$

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο A^{13}.

Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι είναι διαγωνοποιήσιμος με $A = PDP^{-1}$ όπου:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$A^{13} = P \cdot D^{13} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$= \ldots\ldots$

Ορισμός (αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα):
Έστω A $n \times n$ πίνακας και λ ιδιοτιμή του A.
Η αλγεβρική πολλαπλότητα του λ είναι η δύναμη του $(\lambda - \lambda_0)$ στο χαρ. πολυώνυμο.
Η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ_0 είναι η διάσταση του ιδιοχώρου E_{λ_0}.

Θεώρημα:
Έστω A $n \times n$ πίνακας:
(1) Για κάθε ιδιοτιμή του A η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας.
(2) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.
(3) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το άθροισμα των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων των ιδιοτιμών του είναι ίσο με n.