20/11/20 **Σύνοψη:** Α όμοιος με Β αν υπάρχει αντιστρέψιμος P ώστε $A = PBP^{-1}$

- Αν A, B όμοιοι έχουν:
  - ίδια ορίζουσα
  - ίδια τάξη και μηδενικότητα
  - ίδιες ιδιοτιμές και πολλαπλότητες

- Α διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

- **Θεώρημα:** Α $n\times n$ πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ έχει n γραμμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

$$A = PDP^{-1} \quad \text{όπου} \quad D = \begin{pmatrix} \text{ιδιοτιμές} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$P = [\text{ιδιοτιμές σε στήλες}]$$

- **Υπενθύμιση:** Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γρ. ανεξ.

- **Θεώρημα:** Ένας $n\times n$ πίνακας με n διακριτές ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος

- Για διαγωνοποίηση πρέπει πρώτα να βρούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Παραδείγματα:

25 Να εξετάσετε αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος

- Από προηγούμενο παράδειγμα έχουμε βρεί ότι η χαρ. εξίσωση του πίνακα είναι:
$-(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$

- ιδιοτιμές: $\lambda_1=2$ με πολλαπλότητα 2
$\lambda_2=1$ " " 1

- Βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- Βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- Άρα τα $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι γρ. ανεξ.

ιδιοδιανύσματα.

→ Από το θεώρημα διαγωνοποιήσιμου πίνακα, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος

- Οπότε αν $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, βρίσκουμε ότι

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$
$P^{-1}AP = D$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} = \dots$$

$$\dots = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} = D$$

2) Το ίδιο για τον $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-3&5&2\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&0\\-3&5&2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)$$

$= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

• Ιδιοτιμές: $\lambda=1$ με πολ/τητα 1

$\lambda_2=2$ " 2

Ιδιοδιανύσματα

• $\lambda_1=1$, $A-I = \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\1&1&0&0\\-3&5&1&0\end{array}\right)$ → μερικές φορές την παραλείπουμε $\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\-3&5&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&8&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1/8&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/8&0\\0&1&1/8&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

• $x_1 = \frac{1}{8}x_3$, $x_2 = -\frac{1}{8}x_3$, $x_3 \in R$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

• $\lambda_2 = 2$ $[A-2I] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 \in R$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

• Τελικά, ο πίνακας A έχει 2 γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, άρα δεν είναι διαγωνοποιήσιμος

3) Το ίδιο για τον $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = -2$

A 4×4 πίνακας με 4 διαφορετικές ιδιοτιμές άρα διαγωνοποιήσιμος.

Δυνάμεις διαγωνοποιήσιμων πινάκων

• Έστω A διαγωνοποιήσιμος $n \times n$ πίνακας με

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}A)(PP^{-1})(AP) =$$

$$= (P^{-1}A)(AP) = P^{-1}(AA)P = P^{-1}A^2P$$

• Αποδεικνύεται ότι για κάθε k θετικό ακέραιο

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$

Επίσης $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Άρα $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP \Rightarrow D^k = P^{-1}A^kP$

$\Rightarrow PD^kP^{-1} = A^k$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Να βρεθεί ο A^{13}

· Είναι διαγωνοποιήσιμος με $A = PDP^{-1}$

όπου $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα: $A^{13} = PD^{13}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \ldots$

Ορισμός: (Αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα):

Έστω A $n \times n$ πίνακας και λ_0 ιδιοτιμή του A. Η αλγεβρική πολλαπλότητα του λ_0 είναι η δύναμη του $(\lambda - \lambda_0)$ στο χαρ. πολυώνυμο. Η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ_0 είναι η διάσταση του ιδιοχώρου E_{λ_0}.

Θεώρημα: Έστω A $n \times n$ πίνακα

1) Για κάθε ιδιοτιμή του A η γεωμετρική πολ/τα είναι μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολ/τας

2) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν η γεωμετρική πολ/τα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την αλγεβρική πολ/τα της.

3) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν
το άθροισμα των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων των
ιδιοτιμών του είναι ίσο με n.