24/11

Υπενθύμιση:

$$A = P D P^{-1}$$

αντιστρέψιμος ↳ διαγώνιος

Θεώρημα Διαγωνοποιήσιμου Πίνακα:

A $n \times n$ διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ έχει n γρ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

Αν ο A είναι $n \times n$ με n ιδιοτιμές τότε είναι διαγωνοποιήσιμος

Αν λ_0 ιδιοτιμή του A:

- αλγεβρική πολλαπλότητα του λ_0 είναι ιδιοτιμή του $(\lambda - \lambda_0)$ στο χαρ. πολυώνυμο.
- γεωμετρική πολλαπλότητα του λ_0 είναι η διάσταση του ιδιοχώρου $E_{\lambda_0} = Nul(A - \lambda_0 I)$.

Συμβολισμός: αλγεβρική πολλαπλότητα του $\lambda_0 = \pi(\lambda_0)$

γεωμετρική πολλαπλότητα του $\lambda_0 = \gamma(\lambda_0)$

Θεώρημα:
1) $\gamma(\lambda_0) \leq \pi(\lambda_0)$
2) A διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν $\gamma(\lambda_0) = \pi(\lambda_0)$ $\forall$ ιδιοτιμή λ_0.
3) A διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών αθροίζουν στο n (#στηλών = # γραμμών = n).

aw

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$, Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$
αλ. πολ/τητα = 2 ↲ ↳ αλ. πολλαπλότητα = 2
↳ πόσες φορές εμφανίζεται

ή ll

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(-3-\lambda)^2 = (\lambda-5)^2(\lambda-3)^2$$

$\boxed{\lambda_1 = 5}$

$$[A-5I \mid 0] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 ελεύθερες μεταβλητές άρα γεωμετρική πολλαπλότητα = dim(Nul(A−5I)) = 2

Πράγματι: $x_1 = -8x_3 - 16x_4$
$x_2 = -4x_3 - 4x_4$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

δηλ $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$

$\boxed{\lambda_2 = -3}$

$$[A+3I \mid 0] = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 2 ελ. μεταβλητές άρα γεωμ. πολ/τητα $= \dim(Nul(A+3I)) =$
$= \dim(E_{\lambda_2}) = 2$.

Πράγματι: $x_1 = 0$
$x_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

βάση ιδιοχώρου $(E_{\lambda_2}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, δηλ $\dim(E_{\lambda_2}) = 2$.

Εφόσον οι αλγ. πολλαπλότητες των ιδιοτιμών είναι ίσες με τις γεωμ. πολλαπλότητες, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

ή !!

Εφόσον οι γεωμ. πολλαπλότητες αθροίζουν στο 4, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Μιγαδικοί Αριθμοί

$\mathbb{C}$: σύνολο μιγαδικών αριθμών

Ορίζουμε: $i = \sqrt{-1}$, δηλ $i^2 = -1$

Οι αριθμοί της μορφής bi όπου $b \in \mathbb{R}$ ονομάζονται φανταστικοί αριθμοί.

Οι αριθμοί της μορφής $a+bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ ονομάζονται μιγαδικοί αριθμοί

π.χ: $\sqrt{2}\, i$, $1+2i$, $-5i$, ... μιγαδικοί

Αν $z = a+bi$,

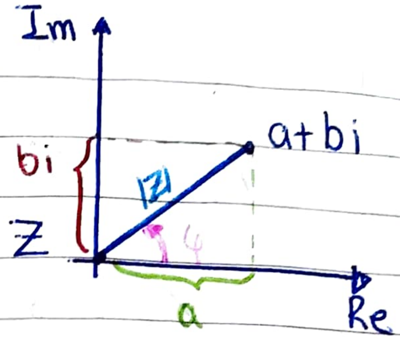
$Re(z) = a \rightarrow$ πραγματικό μέρος.

$Im(z) = bi \rightarrow$ φανταστικό μέρος

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow$ μέτρο ή απόλυτη τιμή

$\bar{z} = a-bi \rightarrow$ συζυγής του z

φ = όρισμα του z
$Re(z) = |z| \cos\varphi$
$Im(z) = |z| \sin\varphi$
$z = |z| \cos\varphi + i\, |z| \sin\varphi \rightarrow$ πολική μορφή z



Πράξεις:

- $(a+bi) \pm (c+di) = (a+c) \pm i(b+d)$
- $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

διότι

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

- $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

διότι

$$\frac{a+bi}{c+di}\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2-(di)^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

Θεώρημα:

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$, δηλ $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

Ορισμός:

Αν $N>0$, $\sqrt{-N} = \sqrt{N}\, i$

π.χ: Η εξίσωση $x^2 = -9$ έχει λύσεις
$x = \pm\sqrt{9}$, δηλ $x = \pm\sqrt{9}\, i$ δηλ $x = \pm 3i$
Πράγματι $(3i)^2 = 9i^2 = -9$, $(-3i)^2 = 9i^2 = -9$

Θεώρημα:

Αν η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$ έχει $D = b^2-4ac < 0$, τότε έχει 2 συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Π.χ: $x^2-4x+8=0$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 8=16-32=-16<0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{4\pm 4i}{2}=\begin{cases}2+2i\\2-2i\end{cases}$$

Θεώρημα:
Κάθε πολυώνυμο, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, έχει μηδενικές ρίζες.