**Συμβολισμός:** • αλγεβρική πολλαπλότητα του $\lambda_0 = n(\lambda_0)$

• γεωμετρική πολλαπλότητα του $\lambda_0 = \gamma(\lambda_0)$

**Θεώρημα:** 1) $\gamma(\lambda_0) \leq n(\lambda_0)$

2) A διαγωνοποιήσιμος αν $\gamma(\lambda_0) = n(\lambda_0)$ $\forall$ ιδιοτιμή $\lambda_0$.

3) A διαγωνοποιήσιμος αν οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών αθροίζουν στο n (#στηλών = #γραμμών = n)

**Παράδειγμα:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Ιδιοτιμές $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$

$\downarrow$ αλγ. πολ/τητα=2 $\quad$ $\downarrow$ αλγ. πολ/τητα = 2

ή

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)^2(-3-\lambda)^2 = (\lambda-5)^2(\lambda+3)^2$$

$\boxed{\lambda_1 = 5}$

Για ιδιοχώρο: $[A-5I \mid 0] = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 ελεύθερες μεταβλητές άρα γεωμ. πολ/τητα $= \dim(Nul(A-5I)) = 2$

Πράγματι: $x_1 = -8x_3 - 16x_4$
$x_2 = 4x_3 + 4x_4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα βάση ιδιοχώρου $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

δηλαδή $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$

$$\boxed{\lambda_2 = -3}$$

$$[A+3I \mid 0] = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 ελεύθερες μεταβλητές άρα γεωμετρική πολλαπλότητα $= \dim(Null(A+3I)) = \dim(E_{\lambda_2}) = 2$

Προφανώς $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα βάση ιδιοχώρου $\xi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

δηλαδή $\dim(\xi_2) = 2$

Εφόσον οι αλγεβρικές πολ/τητες των ιδιοτιμών είναι ίσες με τις γεωμετρικές πολ/τητες, ο $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος

ή

Εφόσον οι γεωμετρικές πολ/τητες αθροίζουν στο 4, ο $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Μιγαδικοί αριθμοί

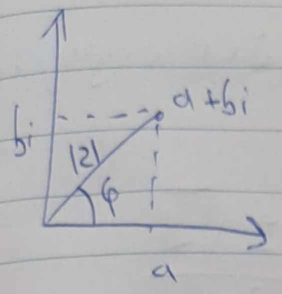
- $\mathbb{C}$: σύνολο μιγαδικών αριθμών.
- Ορίζουμε $i = \sqrt{-1}$, δηλ. $i^2 = -1$
- Οι αριθμοί τα μορφής $bi$ όπου $b \in \mathbb{R}$ ονομάζονται φανταστικοί αριθμοί.
- Οι αριθμοί της μορφής $a + bi$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ ονομάζονται μιγαδικοί αριθμοί

π.χ. $\sqrt{2}i$, $1 + 2i$, $-5i$ ... μιγαδικοί

Αν $z = a + bi$

$Re(z) = a$
$Im(z) = b$
$|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\bar{z} = a - bi$ → συζυγής του z




φ = όρισμα του z

$Re(z) = |z| \cos φ$
$Im(z) = |z| \sin φ$

$z = |z| \cos φ + i\, |z| \sin φ$ → πολική μορφή του z

**Πράξεις:**

- $(a+bi) \pm (c+di) = (a+c) \pm (b+d)i$
- $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$
- $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

**Θεώρημα:** $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ δηλ. $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

**Ορισμός:** Αν $N>0$, $\sqrt{-N} = \sqrt{N}\, i$

π.χ. Η εξίσωση $x^2 = -9$ έχει ρίζες
$x \pm \sqrt{-9}$ δηλ. $x = \pm \sqrt{9}\, i$ δηλ. $x = \pm 3i$

Πράγματι: $(3i)^2 = 9i^2 = -9$, $(-3i)^2 = 9i^2 = -9$

**Θεώρημα:** Αν η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$ έχει $\Delta=b^2-4ac<0$ τότε έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

**π.χ.** $x^2-4x+8=0$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot8=16-32=-16<0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{4\pm4i}{2}=\begin{cases}2+2i\\2-2i\end{cases}$$

**Θεώρημα:** κάθε πολυώνυμο:

$a_nx^n\ a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ με $a_n\neq0$, $a_i\in\mathbb{R}$

έχει $n$ μιγαδικές ρίζες.