27/11

Ο χώρος $\mathbb{C}^n$:

Ορίζουμε $\mathbb{C}^n$ το σύνολο των στοιχείων $V=\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$, όπου $V_i \in \mathbb{C}$

Πρόσθεση και βαθμωτός πολλ/σμός όπου και στον $\mathbb{R}^n$ (στοιχείο προς στοιχείο).

$u+v$

$\lambda u \ (\lambda \in \mathbb{C})$

Αν $V=\begin{pmatrix} a_1+b_1 i \\ a_2+b_2 i \\ \vdots \\ a_n+b_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

τότε $Re(V)=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ και $Im(V)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Επίσης $\bar{V}=\begin{pmatrix} a_1-b_1 i \\ a_2-b_2 i \\ \vdots \\ a_n-b_n i \end{pmatrix}$

Αντίστοιχα, ορίζουμε πίνακες με μιγαδικά στοιχεία

π.χ: $A = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 6-2i \end{pmatrix}$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 4 & 6+2i \end{pmatrix}$ ($\bar{A}$ = συζυγή σε κάθε στοιχείο)

$\det A = (1+i)(6-2i) = 8+8i$

<u>Ιδιότητες:</u>

Έστω $u, v \in \mathbb{C}^n$, A πίνακας με μιγαδικά στοιχεία και $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. $\bar{\bar{u}} = u$
2. $\overline{\lambda u} = \bar{u} \cdot \bar{\lambda}$
3. $\overline{u \pm v} = \bar{u} \pm \bar{v}$
4. $\bar{\bar{A}} = A$ (πίνακας)
5. $\overline{A^T} = (\bar{A})^T$
6. $\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$

Οι έννοιες του γραμ. συνδιασμού, της γραμμικής ανεξαρτησίας, υποχώρων, βάσης, κτλ. είναι ίδιες με τον $\mathbb{R}^n$, με την μόνη διαφορά ότι ο βαθμωτός πολ/σμος γίνεται με $\lambda \in \mathbb{C}$

($V = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \quad \lambda \in \mathbb{C}$)

<u>Συμβολισμός:</u>

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ = $m \times n$ πίνακες με πραγματικά στοιχεία.

$M_{m\times n}(\mathbb{C})$ = $m \times n$ πίνακες με μιγαδικά στοιχεία.

Είναι πιθανόν ένας πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ έχει μιγαδικές ιδιοτιμές

π.χ: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1$

$\lambda^2+1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

Θεώρημα:
Έστω πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.
Τότε το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A και $\bar{x}$ είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Απόδειξη:

$$Ax = \lambda x$$
$$\Rightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x}$$
$$\Rightarrow \bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$
$$\Rightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \quad (A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ άρα } \bar{A} = A)$$

Άρα $\bar{x}$ ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2+1$$
$$\lambda^2+1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = i$; $\lambda_2 = -i$

$\boxed{\lambda_1 = i}$

$$(A-\lambda_1 I) = A - iI = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - iR_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = +ix_2 \quad , x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R}, x \neq 0 \right\}$

$\boxed{\lambda_2 = -i}$

$$(A+iI) = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = -i x_2 , \quad x_2 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{C},\ x_2 \neq 0 \right\}$

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 \neq 0$

Οι ιδιοτιμές του C είναι οι $\lambda = a \pm bi$ και ο πίνακας γράφεται ως $C = \begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

όπου φ το όρισμα του $\lambda = a+bi$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = (\lambda - a)^2 + b^2$$

$$= (\lambda - a)^2 + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - a)^2 = -b^2 \Rightarrow (\lambda - a) = \pm bi$$

$$\Rightarrow \lambda = a \pm bi \text{ ιδιοτιμές}$$

Αν φ όρισμα του λ τότε

$$a = |\lambda| \cos\varphi$$
$$b = |\lambda| \sin\varphi$$

Άρα $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} a/|\lambda| & -b/|\lambda| \\ b/|\lambda| & a/|\lambda| \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a/|\lambda| & -b/|\lambda| \\ b/|\lambda| & a/|\lambda| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία:

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow$ στροφή κατά γωνία φ.

$\begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{pmatrix} \longrightarrow$ μεταβολή μήκους (συρρίκνωση ή επιμήκυνση) κατά $|\lambda|$.

Άρα $Cx =$ στρέφει το x κατά γωνία φ και μεταβάλλει το μήκος κατά $|\lambda|$.

Θεώρημα:

Έστω $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμές $\lambda = a \pm bi$ $(b \neq 0)$. Αν x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = a - bi$ και $P = [\,Re(x) \quad Im(x)\,]$. τότε ο P είναι αντιστρέψιμος και $A = P\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}P^{-1}$, δηλ. ο A είναι όμοιος με πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Άρα όταν έχουμε 2×2 πίνακα A με $A = PCP^{-1}$,

$$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

η απεικόνιση $T(x) = Ax$ περιγράφεται ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & Ax = PCP^{-1}x \\ \text{①}\downarrow & & \uparrow\text{③} \\ P^{-1}x & \xrightarrow[\text{②}]{} & CP^{-1}x \end{array}$$

① Αλλαγή βάσης μέσω του πίνακα P^{-1}

② Στροφή και μεταβολή μήκους μέσω του C.

③ Αλλαγή βάσης (στην αρχική βάση) μέσω του P.

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν πίνακες P και C της μορφής $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ώστε $A = PCP^{-}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(7-\lambda)+20$$

$$= -7+\lambda-7\lambda+\lambda^2+20 = \lambda^2-6\lambda+13$$

$\lambda^2-6\lambda+13$, $\Delta = 36-52 = -16$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}\, i}{2} = 3 \pm 2i$$

$\boxed{\lambda = 3-2i}$ άρα $a=3$, $b=2$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A-(3-2i)I = \begin{pmatrix} -1-3+2i & -5 \\ 4 & 7-3+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2i & -5 \\ 4 & 4+2i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4+2i \\ -4+2i & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to (-4-2i)R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4+2i \\ 4^2+2^2 & 20+10i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4+2i \\ 20 & 20+10i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4+2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1+1/2 i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + \left(1+\frac{1}{2}i\right)x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\left(1+\frac{1}{2}\right)i\, x_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1-1/2 i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $\begin{pmatrix} -2-i \\ 2 \end{pmatrix} = x$

$\mathrm{Re}(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Im}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Άρα $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$