①

27/1/20

- Μιγαδικοί αριθμοί: $z = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$
- $i^2 = -1$
- $\bar{z} = a-bi$, $Re(z) = a$, $Im(z) = b$
- $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$
- $ax^2+bx+c=0$ με $\Delta<0$
- $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- <u>Θεώρημα:</u> Ένα πολυώνυμο βαθμού n με πραγμ. συντελεστή έχει n μιγαδικές ρίζες.
- <u>Ο χώρος $\mathbb{C}^n$</u>
- Ορίζουμε $\mathbb{C}^n$ το σύνολο των στοιχείων

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

όπου $v_i \in \mathbb{C}$

- Πρόσθεση και βαθμωτός πολ/σμός όπως και στον $\mathbb{R}^n$ (στοιχείο προς στοιχείο)
- $u+v$

για $c \in \mathbb{C}$

• Αν

$$v = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

τότε $Re(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ και $Im(v) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

• Επίσης $\bar{v} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 i \\ a_2 - b_2 i \\ \vdots \\ a_n - b_n i \end{pmatrix}$

• Αντίστοιχα ορίζουμε πίνακες με μιγαδικά στοιχεία

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 4 & 6-2i \end{pmatrix}$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 4 & 6+2i \end{pmatrix}$ ($\bar{A}$ = συζυγή σε κάθε στοιχείο)

• $\det A = (1+i)(6-2i) - 4(i) = 6 - 2i + 6i + 2 + 4i$
$= 8 + 8i$

• Ιδιότητες: Έστω $u, v \in \mathbb{C}^n$, A πίνακας με μιγαδικά στοιχεία και $\lambda \in \mathbb{C}$.

1) $\bar{\bar{u}} = u$

2) $\overline{\lambda u} = \bar{\lambda}\bar{u}$

3) $\overline{u \pm v} = \bar{u} \pm \bar{v}$

4) $\bar{\bar{A}} = A$

5) $\overline{A^T} = (\bar{A})^T$

6) $\overline{AB} = \bar{A}\,\bar{B}$

• Οι έννοιες του γραμ. συνδυασμού της γραμ. ανεξαρτησίας, υποχώρων, βάσης κτλ. είναι ίδιες με τον $\mathbb{R}^n$, με τη μόνη διαφορά ότι ο βαθμωτός πολ/σμός γίνεται με $\lambda \in \mathbb{C}$.

$(V = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n,\ \lambda_i \in \mathbb{C})$

• Συμβολισμός:

• $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ = $m\times n$ πίνακες με πραγμ. στοιχεία.

• $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ = $m\times n$ πίνακες με μιγαδικά στοιχεία.

• Είναι πιθανόν ένας πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές

• π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda^2 = -1 \iff \lambda = \pm i$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A και $\bar{x}$ είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

- Απόδειξη: $Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x}$$
$$\Rightarrow \bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$
$$\Rightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \quad (A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ άρα } \bar{A} = A)$$

- Άρα $\bar{x}$ ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$.

- <u>Παράδειγμα</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

ιδιοτιμές: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

<u>Για $\lambda_1 = i$</u>

$$A - iI = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = ix_2, \quad x_2 \in \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ιδιοδιάνυσμα} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{C}, x \neq 0 \right\}$$

Για $\lambda_2 = -i$

$$A - \lambda_2 I = A + iI = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - iR_1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -i x_2$, $x_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

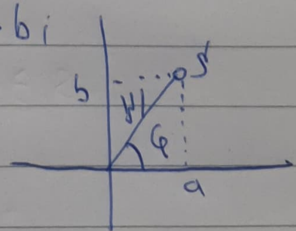
Ιδιοδιανύσματα $= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 \in \mathbb{C}, x_2 \neq 0 \right\}$

• **Θεώρημα:** Έστω ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$

• Οι ιδιοτιμές του C είναι οι $\lambda = a \pm bi$ και ο πίνακας γράφεται ως

$$C = \begin{pmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

όπου φ το όρισμα του $\lambda = a + bi$



Απόδειξη

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = (\lambda - a)^2 + b^2$$

$\Rightarrow (\lambda - a)^2 + b^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - a)^2 = -b^2$

$\Rightarrow \lambda - a = \pm bi \Rightarrow \lambda = a \pm bi \leftarrow$ ιδιοτιμές

Αν φ όρισμα του ζ τότε:

$a = |\zeta| \cos\varphi$

$b = |\zeta| \sin\varphi$

Άρα: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = |\zeta| \begin{pmatrix} a/|\zeta| & -b/|\zeta| \\ b/|\zeta| & a/|\zeta| \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} |\zeta| & 0 \\ 0 & |\zeta| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a/|\zeta| & -b/|\zeta| \\ b/|\zeta| & a/|\zeta| \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} |\zeta| & 0 \\ 0 & |\zeta| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία:</u>

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \rightarrow$ στροφή κατά γωνία φ

$\begin{pmatrix} |\zeta| & 0 \\ 0 & |\zeta| \end{pmatrix} \rightarrow$ μεταβολή μήκους (συρρίκνωση ή επιμήκυνση) κατά $|\zeta|$.

• Άρα Cx = στρέφει το x κατά γωνία φ και μεταβάλει το μήκος κατά $|\zeta|$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμές $\zeta = a \pm bi$ $(b \neq 0)$. Αν το x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\zeta = a - bi$ και $P = [\mathrm{Re}(x)\ \mathrm{Im}(x)]$ τότε ο P είναι αντιστρέψιμος και

$A = P \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P^{-1}$ δηλ. ο A είναι όμοιος με πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Άρα όταν έχουμε 2×2 πίνακα A με
$A = PCP^{-1}$, $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

η απεικόνιση $T(x) = Ax$ περιγράφεται ως εξής

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "1"'] & Ax = PCP^{-1}x \\ P^{-1}x \arrow[r, mapsto, "2"'] & CP^{-1}x \arrow[u, mapsto, "3"'] \end{tikzcd}$$

(1) Αλλαγή βάσης μέσω του πίνακα P^{-1}

(2) Στροφή και μεταβολή μήκους μέσω του C

(3) Αλλαγή βάσης (στην αρχική βάση) μέσω του P.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ Να βρεθούν πίνακες P και C της μορφής $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ώστε $A = PCP^{-1}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(7-\lambda) + 20 =$

$= -7 + \lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 20 = \lambda^2 - 6\lambda + 13$

$= \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, $\Delta = 36 - 52 = -16$

$\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}\, i}{2} = 3 \pm 2i$

⑨

Για $\lambda = 3 - 2i$ άρα $a = 3$, $b = 2$, $\boxed{C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$

$$A - (3-2i)I = \begin{pmatrix} -1-3+2i & -5 \\ 4 & 7-3+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2i & -5 \\ 4 & 4+2i \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 4+2i \\ -4+2i & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to (-4-2i)R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4+2i \\ 4^2+2^2 & 20+10i \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 4+2i \\ 20 & 20+10i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4+2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + (1+\tfrac{1}{2}i)x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -(1+\tfrac{1}{2})i\, x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2}i \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα ιδιοάνυσμα είναι το $\begin{pmatrix} -2 & -i \\ & 2 \end{pmatrix}$

$Re(x) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $Im(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Άρα $\boxed{P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$