01/12

Συμπλήρωμα:

Κάθε 2x2 πίνακας A είναι όμοιος με πίνακα της μόρφης
$C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, όπου a-bi ιδιοτιμή του A.

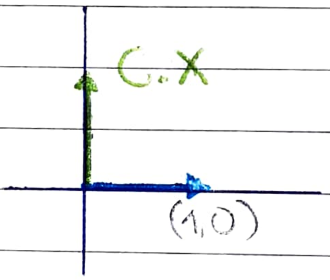
Ο C προκαλεί στροφή κατά γωνία φ και μεταβολή μήκους κατά $r = |a-bi|$

φ = όρισμα του a-bi

π.χ.:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{στροφή κατά } \frac{\pi}{2}$$

Έστω $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$C\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C^2\cdot X = C\cdot C\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3\cdot X = C\cdot(C^2\cdot X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C^4\cdot X = C\cdot(C^3\cdot X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X$$

Υπάρχει k θετικός ακέραιος ώστε $C^k\cdot X = \lambda X$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$;

Ναι, $k=4$

Π.χ.:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Στροφή κατά γωνία $\pi/2$ και διπλασιάζει μήκος.

Έστω $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C^2 \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$C^4 \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$