18/09

Υπενθ:

A αντιστρέψιμος αν $\exists\, \overset{A^{-1}}{\overset{\Uparrow}{B}}$ ώστε $AB = BA = I$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Θεώρημα: (αντίστροφος γινομένου)

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Απόδειξη:

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{I}A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Δυνάμεις Πινάκων:

$A^0 = I$

Για $n \in \mathbb{N}, (n>0)$ $A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n}$

$A^{-n} = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{n}$

Ιδιότητες:

1) $A^r \cdot A^s = A^{r+s}$
2) $(A^r)^s = A^{r \cdot s}$
3) $(A^{-1})^{-1} = A$
4) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A^n είναι αντιστρέψιμος με $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$
5) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και A αντιστρέψιμος τότε και ο λA είναι αντιστρέψιμος και $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$.

Παρατήρηση:
Όταν έχουμε ταυτότητες πινάκων ο πολ/σμος δεν είναι μεταθετικός

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+AB+B^2$. ✓
$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. ✗

Θεώρημα: (αντίστροφος του ανάστροφου)
Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε και ο A^T είναι αντιστρέψιμος
με $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

Στόχος: ένα αλγόριθμο που να δίνει τον αντίστροφο πίνακα

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (ΣΜΓ):

1) Εναλλαγή της γραμμής i με τη γραμμή j ενός πίνακα ($R_i \leftrightarrow R_j$)
2) Πολ/σμος της i γραμμής με μη μηδενική σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$ ($R_i \to \lambda R_i$)
3) Πρόσθεση πολ/σίου της i γραμμής στην j γραμμή ($R_j \to R_j+\lambda R_i$)

Π.χ.:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&5&6\\1&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to -2R_1}\begin{pmatrix}-2&-4&-6\\1&3&4\\1&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&7&10\\1&5&6\end{pmatrix}$$

Κάθε ΣΜΓ αντιστοιχεί σε πολ/σμο με ένα πίνακα που προκύπτει κάνοντας την ίδια πράξη στον ταυτοτικό.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -2R_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$(1,1) = -2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1$ $\quad (2,1) = 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1$ $\quad (3,1) = 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1$

$(1,2) = -2\cdot 2 + 0\cdot 3 + 0\cdot 5$ $\quad (2,2) = 0\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 5$ $\quad (3,2) = 0\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot 5$

$(1,3) = -2\cdot 3 + 0\cdot 4 + 0\cdot 6$ $\quad (2,3) = 0\cdot 3 + 1\cdot 4 + 0\cdot 6$ $\quad (3,3) = 0\cdot 3 + 0\cdot 4 + 1\cdot 6$

Ορισμός:

Ένας πίνακας λέγεται στοιχειώδης όταν προκύπτει από τον ταυτοτικό με εφαρμογή ενός ΣΜΓ.

Η εφαρμογή ΣΜΓ σε ένα πίνακα είναι ο πολ/σμος του πίνακα (από αριστερά) με τον αντίστοιχο (στοιχειώδη).

Θεώρημα:

Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό με αντίστροφο ΣΜΓ.

ΣΜΓ	Αντίστροφος ΣΜΓ
$R_i \to \lambda \cdot R_i$	$R_i \to 1/\lambda\, R_i$
$R_i \leftrightarrow R_j$	$R_i \leftrightarrow R_j$
$R_i \to R_i + \lambda R_j$	$R_i \to R_i - \lambda R_j$

$E = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Πράγματι:

$$E \cdot E^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} \cdot E = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Κλιμακωτοί και ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες:

(για κάθε πίνακα όχι μόνο τετραγωνικό).

Ένας πίνακας A λέγεται κλιμακωτός αν ισχύουν οι 3 παρακάτω συνθήκες:

1) αν μια γραμμή δεν αποτελείται μόνο από 0 τότε το πρώτο της στοιχείο είναι το 1.
2) Όσες γραμμές αποτελούνται μόνο από 0 βρίσκονται στο κάτω μέρος του πίνακα.
3) αν υπάρχουν 2 διαδοχικές γραμμές με μη μηδενικά στοιχεία τότε το ηγετικό 1 της πρώτης γραμμής βρίσκεται πιο αριστερά από το ηγετικό 1 της $2^{ης}$.

• Ο πίνακας A λέγεται ανηγμένος κλιμακωτός αν ισχύουν τα 3 παραπάνω και επιπλέον:

4) κάθε στήλη που περιέχει ηγετικό 1, όλα τα υπόλοιπα στοιχεία 0.

π.χ: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ Κλιμακωτός (όχι ανηγμένος)

Ηγετικό 1 σε κάθε γραμμή (και το κάθε ηγετικό 1 δεν πρέπει να είναι κάτω από το άλλο).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ ανηγμένος κλιμακωτός.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ όχι κλιμακωτός