18/9/20 Ανακοινώσεις:

Ενδιάμεση: Σάββατο 17 Οκτωβρίου, 14:00-16:00

χ° Δ02 Β204 Α → Φ

χ° Δ02 Β205 Χ → ...

• Υπενθύμιση:

• A αντιστρέψιμος αν $\exists A^{-1}$ ώστε $AB = BA = I$

• $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

• Θεώρημα (αντίστροφος γινομένου)

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Απόδειξη: $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\overset{\text{ταυτοτικός}}{I}A^{-1} = AA^{-1} = I$

ή $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I)B = B^{-1}B = I$

• Δυνάμεις πινάκων

• $A^0 = I$

• Για $n \in \mathbb{N}$, $(n>0)$ $A^n = A \cdot A \dots A$

$A^{-n} = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \dots A^{-1}}_{n}$

• Ιδιότητες: • $A^r A^s = A^{r+s}$

• $(A^r)^s = A^{rs}$

• $(A^{-1})^{-1} = A$

• Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A^n είναι αντιστρέψιμος με $(A^n)^{-1} = A^{-n}$

* Αντίθετος πίνακας ενός A είναι ο $-A$.

• Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και A αντιστρέψιμος τότε και λA είναι αντιστρέψιμος και $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

• Παρατήρηση: Όταν έχουμε ταυτότητες πινάκων ο πολ/σμος δεν είναι μεταθετικός

π.χ. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \rightarrow$ ✗

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \rightarrow$ ✓

• Θεώρημα (αντίστροφος ανάστροφου)

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε και ο A^T είναι αντιστρέψιμος με $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

• Στόχος: να βρούμε αλγόριθμο που να δίνει τον αντίστροφο πίνακα

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (ΣΜΓ)

1) Εναλλαγή της γραμμής i με τη γραμμή j ενός πίνακα ($R_i \leftrightarrow R_j$)

2) Πολ/σμός της i γραμμής με μια μη μηδενική σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$ ($R_i \to \lambda R_i$)

3) Πρόσθεση πολ/σίου της i γραμμής στην j γραμμή ($R_j \to R_j + \lambda R_i$)

π.χ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -2R_1} \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

• Κάθε ΣΜΓ αντιστοιχεί σε πολ/σμο από αρ. με έναν πίνακα που προκύπτει κάνοντας την ίδια πράξη στον ταυτοτικό

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -2R_1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

• <u>Ορισμός:</u> Ένας πίνακας λέγεται στοιχειώδης όταν προκύπτει από τον ταυτοτικό με εφαρμογή ενός ΣΜΓ.

• Η εφαρμογή ΣΜΓ σε έναν πίνακα είναι ο πολ/σμός του πίνακα (από αριστερά) με τον αντίστοιχο στοιχειώδη.

• <u>Θεώρημα:</u> Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό με αντίστροφο ΣΜΓ.

ΣΜΓ	Αντίστροφος ΣΜΓ
$R_i \to \lambda R_i$	$R_i \to \frac{1}{\lambda} R_i$
$R_i \leftrightarrow R_j$	$R_i \leftrightarrow R_j$
$R_i \to R_i + \lambda R_j$	$R_i \to R_i - \lambda R_j$

• Κλιμακωτοί και ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες

(Για κάθε πίνακα όχι μόνο τετραγωνικό)

- Ένας πίνακας A λέγεται κλιμακωτός αν ισχύουν οι 3 παρακάτω συνθήκες:

1) Αν μια γραμμή δεν αποτελείται μόνο από μηδέν τότε το πρώτο της στοιχείο είναι 1.

2) Όσες γραμμές αποτελούνται μόνο από μηδέν βρίσκονται στο κάτω μέρος του πίνακα.

3) Αν υπάρχουν δύο διαδοχικές γραμμές με μη μηδενικά στοιχεία τότε το ηγετικό 1 της πρώτης βρίσκεται πιο αριστερά από το ηγετικό 1 της δεύτερης.

• Ο πίνακας A λέγεται ανηγμένος κλιμακωτός αν ισχύουν τα 3 παραπάνω και επιπλέον:

4) κάθε στήλη που περιέχει ηγετικό 1 έχει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία μηδέν.

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ κλιμακωτός

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ανηγμένο κλιμακωτός

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ όχι κλιμακωτος