22/09

Ορισμός:

2 πίνακες λέγονται γραμμοϊσοδύναμοι ή ισοδύναμοι αν ο καθένας προκύπτει από εφαρμογή γραμμοπράξεων στον άλλον.

Συμβολίζουμε: $A \sim A$

Θεώρημα:

Κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με κλιμακωτό και ένα ανηγμένο κλιμακωτό.
(Ο κλιμακωτός δεν είναι μοναδικός ενώ ο ανηγμένος κλιμακωτός είναι μοναδικός).

π.χ.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Να μετατραπεί σε ανηγμένο κλιμακωτό.

βήμα 1: $R_2 \to R_2 - 2R_1$
$R_3 \to R_3 - R_1$
$R_4 \to R_4 + R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

έχουμε το ηγετικό 1, και πρέπει να μηδενιστούν τα αποκάτω του.

βήμα 2+3: πρέπει να μπεί 1 στην θέση (2,2) και να μηδενιστούν τα αποκάτω του.

$R_2 \leftrightarrow R_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

ηγετικό 1

$R_3 \leftrightarrow R_4$ $R_4 \to \frac{1}{5} R_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

πρέπει να μηδενιστεί.

$R_4 \to R_4 - 3R_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ηγετικό 1, για να γίνει κλιμακωτός.

$R_4 \to \frac{1}{4} \cdot R_4$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ κλιμακωτός.

πρέπει να μηδενιστούν οι θέσεις πάνω από τα ηγετικά 1

$R_1 \to R_1 - 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_4]{R_1 \to R_1 + 11R_4,\ R_2 \to R_2 - 6R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

$\Rightarrow$ ανηγμένος κλιμακωτός.

<u>π.χ:</u>

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ να γίνει κλιμακωτός.

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$
$R_4 \to R_4 - 3R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{κλιμακωτός.}$$

→ μπορεί να είναι κλιμακωτός ακόμα και με τις 2 κάτω γραμμές ίσες με 0.

Θεώρημα Αντίστροφου Πίνακα:

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A.

(I) ο A είναι αντιστρέψιμος.
(II) η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n.
(III) ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Το II λέει ότι υπάρχει μια σειρά γραμμοπράξεων που μετατρέπει τον A σε I_n. Άρα υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$ ώστε $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I_n$.

πολ/ζουμε από δεξιά με A^{-1}

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 (A \cdot A^{-1}) = I_n A^{-1}$$

$$\Rightarrow E_k E_{k-1} \cdots E_1 \cdot I_n = A^{-1}$$

Άρα οι ίδιες γραμμοπράξεις που μετατρέπουν τον A στον I_n, μετατρέπουν τον I_n στον A^{-1}.

Αλγόριθμος για εύρεση του A^{-1}:

- Γράφουμε τον πίνακα $[A \mid I]$
- Με γραμμοπράξεις μετατρέπουμε τον πίνακα στην μορφή $[I \mid A^{-1}]$
- Αν στην διαδικασία προκύψει μηδενική γραμμή ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Π.Χ.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$ Να βρεθεί ο αντίστροφός του.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_2 \to R_2 - 2R_1 \,|\, R_3 \to R_3 - R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_3 \to R_3 + 2R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_3 \to -R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_1 \to R_1 - 2R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_1 \to R_1 - 9R_3 \,|\, R_2 \to R_2 + 3R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

I_3, ἀρα $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$