ΣΜΓ ⟷ Γραμμοπράξεις

22/9/20 · **Ορισμός:** Δύο πίνακες λέγονται γραμμοϊσοδύναμοι ή ισοδύναμοι αν ο καθένας προκύπτει από εφαρμογή γραμμοπράξεων στον άλλον.

• Συμβολίζεται: $A \sim B$

• **Θεώρημα:** Κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν κλιμακωτό και έναν ανηγμένο κλιμακωτό.

[– Ο κλιμακωτός δεν είναι μοναδικός.
– Ο ανηγμένος κλιμακωτός είναι μοναδικός.]

• **Παράδειγμα**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Να μετατραπεί σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$\downarrow \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to \frac{1}{5} \cdot R_4]{R_3 \longleftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to \frac{1}{4} R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{κλιμακωτός}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 6R_4 \\ R_3 \to R_3 + R_4}]{R_1 \to R_1 + 11R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

• Παράδειγμα

Να γίνει κλιμακωτός

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3+R_1 \\ R_4 \to R_4+3R_3}]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4-3R_2]{R_3 \to R_3-3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{κλιμακωτός}$$

• Θεώρημα αντιστρόφου πίνακα

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για ένα $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A.

I) Ο A είναι αντιστρέψιμος

II) Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n

III) Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

• Το (II) λέει ότι υπάρχει μια σειρά γραμμοπράξεων που μετατρέπει τον A σε I_n. Άρα υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$ ώστε $E_k E_{k-1} \dots E_2 \cdot E_1 = I_n$

$\Rightarrow$ Πολλαπλασιάζουμε από δεξιά $A^{-1} \Rightarrow E_k E_{k-1} \dots E_1 (A A^{-1}) = I_n A^{-1}$

$\Rightarrow E_k E_{k-1} \dots E_1 I_n = A^{-1}$

Άρα οι ίδιες γραμμοπράξεις που μετατρέπουν τον A στον I_n, μετατρέπουν τον I_n στον A^{-1}

Αλγόριθμος για εύρεση του A^{-1}:

- Γράφουμε τον πίνακα $[A \mid I]$
- Με γραμμοπράξεις μετατρέπουμε τον πίνακα στην μορφή $[I \mid A^{-1}]$
- Αν στην διαδικασία προκύψει μηδενική γραμμή ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

- **Παράδειγμα:** Να βρεθεί ο αντίστροφος του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 3R_3]{R_1 \to R_1 - 9R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$\underbrace{\qquad}_{I_3}$

Άρα $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Εάν μια γραμμή είναι όλα μηδέν δεν είναι αντιστρέψιμος.