25/09

Αναστρέψιμος : $A \sim I_n$.

$[A|I] \sim [I|A]$

Π.χ:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_2 \to R_2 - 2R_1 \,\Big|\, R_3 = R_3 + R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \; R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$ Άρα ο A δεν είναι αναστρέψιμος.

Άσκηση: Να όλοι οι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες 3x3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \text{ ή } r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 2: Γραμμικά Στοιχεία

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ορισμός:

- σύνολο λύσεων είναι το σύνολο των ακολουθιών $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ώστε η αντικατάσταση $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$ να ικανοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος.
- αν $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ το σύστημα λέγεται ομογενές
- το ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση την $(0, 0, \dots, 0)$ την οποία ονομάζουμε τετριμμένη λύση.
- Ένα σύστημα λέγεται συμβιβαστό αν υπάρχει τουλάχιστον μια λύση.
- δύο συστήματα είναι ισοδύναμα αν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Είδαμε ότι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ εξισώσεων $\longleftrightarrow$ γραμμοπράξεις.

Άρα οι γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα δεν επηρεάζουν το σύνολο λύσεων (δίνουν ισοδύναμο σύστημα).

Στο γραμμικό σύστημα ενδιαφερόμαστε για:

1) Ύπαρξη (τουλάχιστον μια λύση).
2) Μοναδικότητα (αν υπάρχει μοναδική λύση.)

Θεώρημα:

Για ένα γραμμικό σύστημα υπάρχουν μόνο 3 περιπτώσεις:

1) Καμία λύση
2) Υπάρχει μοναδική λύση
3) Υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Επίλυση με απαλοιφή:

Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

1) σε κλιμακωτό και μετά κάνουμε πίσω αντικατάσταση

ή

2) σε ανηγμένο κλιμακωτό:

(1) απαλοιφή Gauss

(2) απαλοιφή Gauss-Jordan

Π.Χ: να λυθεί το σύστημα (Gauss)

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6.
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6
\end{array}\right)
$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1 \;\Big\downarrow\; R_4 \to R_4 - 2R_1$$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6
\end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -R_2]{R_3 \to R_3 - 5R_2,\quad R_4 \to R_4 - 4R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_4]{R_3 \to \frac{1}{6} R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Πίσω αντικατάσταση:

$X_6 = \frac{1}{3}$

$X_3 + 2X_4 + 3X_6 = 1 \Rightarrow X_3 + 2X_4 = 0 \Rightarrow \boxed{X_3 = -2X_4}$

$X_1 + 3X_2 - 2X_3 + 2X_5 = 0 \Rightarrow X_1 = 3X_2 - 4X_4 - 2X_5$

Το X_2, X_4, X_5 δεν αντιστοιχούν σε ηγετικό 1
$\Rightarrow$ είναι ελεύθερες μεταβλητές.
Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = \left(-3X_2 - 4X_4 - 2X_5, X_2, -2X_4, X_4, X_5, 1/3\right)$$

Π.χ: Το ίδιο για το σύστημα (Jordan)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1 \quad \Big\downarrow \quad \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftrightarrow R_4 \quad \Big\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + R_2 \quad \Big\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow\; R_3 \leftrightarrow R_4 \quad R_3 \to \tfrac{1}{5} R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow\; R_4 \to R_4 - 3R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow\; R_4 \to \tfrac{1}{4} R_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & +3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow\; R_1 \to R_1 - 2R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -9 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow\; R_1 \to R_1 + 2R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$R_1 \to R_1 + 11R_4 \Bigg| \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 6R_4 \\ R_3 \to R_3 + R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Άρα $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, $X_4 = 1$

Οπότε μόνο μια λύση $(1,1,2,2)$