29/09

Υπενθύμιση:

Απαλοιφή Gauss: Επαυξημένος πίνακας → κλιμακωτός

πίσω αντικατάσταση.

Απαλοιφή Gauss – Jordan: Επαυξημένος πίνακας → ανηγμένος κλιμακωτός.

Μέθοδος απαλοιφής:

- Έστω A ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.
- Όσες μεταβλητές αντιστοιχούν σε ηγετικό 1 λέγονται κύριες μεταβλητές, οι υπόλοιπες λέγονται ελεύθερες μεταβλητές.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

1η περίπτωση:
Υπάρχει στον A γραμμή της μορφής $[0\ 0 \dots 0 \mid b]$, $b \neq 0$.
Τότε το σύστημα είναι μη συμβιβαστό. (Δεν έχει καμία λύση)

2η περίπτωση:
Δεν ισχύει η πρώτη και έχουμε τόσα ηγετικά 1 όσες και οι μεταβλητές (δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές).
Τότε το σύστημα έχει μηδενική λύση.

3η περίπτωση:
Δεν ισχύει η πρώτη και τα ηγετικά 1 είναι λιγότερα από τις μεταβλητές (υπάρχου ελεύθερες μεταβλητές).
Τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις που εκφράζονται παραμετρικά (με παραμέτρους τις ελεύθερες μεταβλητές).

Παράδειγμα:
Οι παρακάτω πίνακες προέκυψαν από επαυξημένους πίνακες γραμμικών συστημάτων. Τι συμπεραίνεται για τις λύσεις σας;

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ έχει γραμμή $(0\ 0\ 0 \mid 1)$ άρα μη συμβιβαστό.

ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ άπειρες λύσεις x_2, x_3 ελεύθερες μεταβλητές.

iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ άπειρες λύσεις x_3 ελεύθερη μεταβλητή

iv) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ άπειρες λύσεις x_1, x_3 ελεύθερες μεταβλητές.

<u>Παρατήρηση:</u>
Αν το σύστημα είναι ομογενές, δεν υπάρχει γραμμή της μορφής $(0\ 0 \dots 0 | b)$, $b \neq 0$, άρα πάντα υπάρχει τουλάχιστο μια λύση.

<u>Θεώρημα:</u>
Αν σε ομογενές γραμμικό σύστημα έχουμε περισσότερους αγνώστους από ότι εξισώσεις τότε έχουμε άπειρες λύσεις.

<u>Επίλυση με αντιστροφή πίνακα:</u>

Έστω γραμμικό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$ n εξισώσεις με n αγνώστους.

Έστω:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$ πίνακας συντελεστών του συστήματος.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως $A \cdot X = b$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε πολ/ζουμε με τον A^{-1} από αριστερά:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}b$$
$$\Rightarrow I_n X = A^{-1}b$$
$$\boxed{\Rightarrow X = A^{-1}b}$$

Θεώρημα:
Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε το γρ. σύστημα $A \cdot X = b$ έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1}b$. (Μοναδική λύση διότι αν X_1 είναι άλλη λύση τότε $AX_1 = b \Rightarrow A^{-1}AX_1 = A^{-1}b \Rightarrow$
$\Rightarrow X_1 = A^{-1}b = X$)

π.χ. να λυθεί το γρ. σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + \quad\quad + 8x_3 &= 17. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{A}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_3 \to R_3 + 2R_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 - 8R_3 \\ R_2 \to R_2 + 3R_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή η λύση είναι: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Θεώρημα Αντιστρόφου πίνακα ΤΑΕΙ:

I) Ο A είναι αντιστρέψιμος
II) Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n
III) Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.
IV) Το ομογενές σύστημα $A \cdot X = 0$ έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη).
V) Το σύστημα $A \cdot X = b$ έχει μοναδική λύση (την $X = A^{-1} b$) για κάθε b.

(I $\Rightarrow$ IV) $AX = 0 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}0$
$\Rightarrow X = 0$

(IV $\Rightarrow$ II) $AX = 0$ έχει μοναδική λύση
$\Rightarrow$ ο A έχει τόσα ηγετικά 1 όσες οι στήλες του
$\Rightarrow$ η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του είναι ο I_n.

(I $\Rightarrow$ V) $AX = b \Rightarrow X = A^{-1} b$.

(V $\Rightarrow$ IV) ✓

Θεώρημα:
Κάθε γρ. σύστημα έχει ακριβώς μια ή καμία ή άπειρες λύσεις.

Απόδειξη:
Έστω ότι το σύστημα γράφεται $AX=b$

Έστω X_0, X_1 δύο λύσεις του συστήματος ($X_0 \neq X_1$). Άρα
$AX_0=b$ και $AX_1=b$.
Παρατηρούμε ότι:

$$A(X_0-X_1)=AX_0-AX_1=b-b=0$$

Έστω $X_2=X_0-X_1$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$A(X_1+\lambda X_2)=AX_1+A(\lambda X_2)$$
$$=AX_1+\lambda(AX_2)=b+\lambda\cdot 0=b$$

Δηλαδή το $X_1+\lambda X_2$ είναι λύση του συστήματος $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα επίλυσης με απαλοιφή:

$$\begin{aligned} X_1-X_2+2X_3-X_4&=1\\ 2X_1+X_2-2X_3-2X_4&=-2\\ -X_1+2X_2-4X_3+X_4&=1\\ 3X_1\qquad\qquad -3X_4&=+3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2\\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & -3 & +3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l} R_2 \to R_2-2R_1\\ R_3 \to R_3+R_1\\ R_4 \to R_4-3R_1 \end{subarray}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \quad R_2 \to \frac{1}{3}R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - 3R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(x_3, x_4 ελεύθερες μεταβλητές)

Πίσω αντικατάσταση $x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + \cancel{x_2} - 2x_3 + x_4$$

$$x_1 = 1 + x_4.$$

Λύσεις: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1+x_4, 2x_3, x_3, x_4)$