12/9/20 · **Απαλοιφή Gauss:** Επαυξημένος → κλιμακωτός → πίσω αντικατάσταση

· **Απαλοιφή Gauss**-Jordan: Επαυξημένο → ανηγμένος κλιμακωτός

· **Μέθοδος απαλοιφής:**

· Έστω A ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

· Όσες μεταβλητές αντιστοιχούν σε ηγετικό 1 ονομάζονται κύριες μεταβλητές, οι υπόλοιπες λέγονται ελεύθερες μεταβλητές.

· **1η περίπτωση:** Υπάρχει στον A γραμμή της μορφής $[0\ 0 \dots 0 \mid b]$, $b \neq 0$. Τότε το σύστημα είναι μη συμβιβαστό. Δεν έχει καμία λύση.

· **2η περίπτωση:** Δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση και έχουμε τόσα ηγετικά 1 όσες και οι μεταβλητές (δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές). Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

· **3η περίπτωση:** Δεν ισχύει η 1η και τα ηγετικά 1 είναι λιγότερα από τις μεταβλητές. (υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές). Τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις που εκφράζονται παραμετρικά (με παραμέτρους τις ελεύθερες μεταβλητές.

· **Παράδειγμα**

Οι παρακάτω πίνακες προέκυψαν από επαυξημένους πίνακες γραμμικών συστημάτων. Τι συμπεραίνεται για τις λύσεις τους

i) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ → Έχει γραμμή $(0\ 0\ 0 \mid 1)$ άρα μη συμβιβαστό

ii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ → άπειρες λύσεις (x_3 ελεύθερη μεταβλητή)

iii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ → άπειρες λύσεις (x_2, x_3 ελεύθερες μεταβλητές)

• **Παρατήρηση:** Εάν το σύστημα είναι ομογενές δεν υπάρχει γραμμή της μορφής $(0\ 0 \dots 0 \mid b)$ $b \neq 0$ άρα πάντα θα υπάρχει έστω μία λύση

• **Θεώρημα:** Αν σε ομογενές γραμμικό σύστημα έχουμε περισσότερους αγνώστους από ό,τι εξισώσεις τότε έχει άπειρες λύσεις

• **Επίλυση με αντιστροφή πίνακα:**

• Έστω γραμμικό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$ n εξισώσεις με n αγνώστους

• Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ πίνακας συντελεστών του συστήματος.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως $Ax = b$.
- Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε πολ/ζουμε με τον A^{-1} από αριστερά:

$$\boxed{(A^{-1}A)x = A^{-1}b \Rightarrow I_n x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b}$$

Θεώρημα: Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε το γρ. σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση την $x = A^{-1}b$. [Μοναδική διότι αν x_1 είναι άλλη λύση τότε $Ax_1 = b \Rightarrow A^{-1}Ax_1 = A^{-1}b \Rightarrow x_1 = A^{-1}b = x$]

Παράδειγμα: Να λυθεί γραμ. σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$$x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

δηλαδή $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα ΤΑΕΙ:

I) Ο A είναι αντιστρέψιμος

II) Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n.

III) Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

IV) Το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση (μια τετριμμένη)

V) Το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση (την $x = A^{-1}b$) για κάθε b.

Αποδείξεις (όχι αναγκαστικές)

(I ⇒ IV) $Ax = 0 \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}0 \Rightarrow x = 0$

(IV ⇒ II) $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση

⇒ ο A έχει όσα ηγετικά 1 όσες και οι στήλες του.

⇒ η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του είναι ο I_n

(I ⇒ IV) $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$

Θεώρημα: κάθε γρ. σύστημα έχει ακριβώς μία ή καμία ή άπειρες λύσεις.

Απόδειξη: Έστω ότι το σύστημα γράφεται $Ax = b$

Έστω x_0, x_1 δύο λύσεις του συστήματος ($x_0 \neq x_1$). Άρα $Ax_0 = b$ και $Ax_1 = b$.

Παρατηρούμε ότι $A(x_0 - x_1) = Ax_0 - Ax_1 = b - b = 0$

• Έστω $x_2 = x_0 - x_1$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $A(x_1 + \lambda x_2) = Ax_1 + A(\lambda x_2)$

$$= Ax_1 + \lambda(Ax_2) = b + \lambda \cdot 0 = b$$

Δηλαδή το $x_1 + \lambda x_2$ είναι λύση του συστήματος για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα επίλυση με απαλοιφή:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_2 = -2$$
$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$$
$$3x_1 - 3x_4 = +3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & +3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_2]{R_3 \to R_3 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow x_3, x_4$ ελεύθερες μεταβλητές

Πίσω αντικατάσταση: $x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 + x_4$$

Λύσεις: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + x_4, 2x_3, x_3, x_4)$