02/10/2020 Κεφάλαιο 3: Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

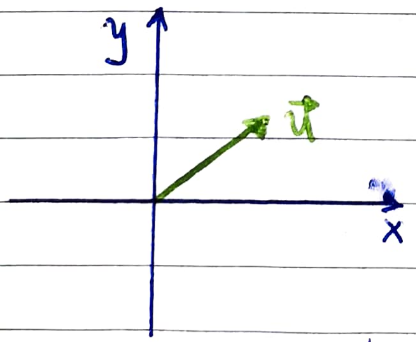
**Ορισμός:**
Έστω ένα μη κενό σύνολο V στο οποίο έχουμε δύο πράξεις:
- πρόσθεση
- πολ/σμος με πραγματικό αριθμό.

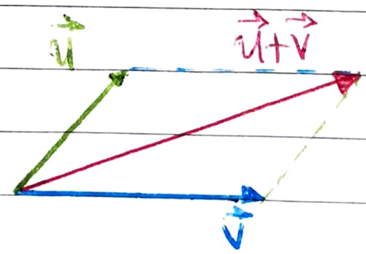
Το V λέγεται **διανυσματικός χώρος** αν ισχύουν οι εξής ιδιότητες για κάθε $u, v, w \in V$.

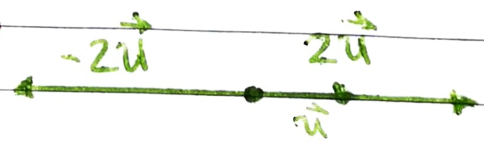
1) $u+v=v+u$
2) $u+(v+w)=(u+v)+w$
3) υπάρχει στοιχείο $0 \in V$ ώστε για κάθε $v \in V$ $0+v=v+0=v$
4) $\forall\, v \in V$ υπάρχει $-v \in V$ ώστε $v+(-v)=(-v)+v=0$.
5) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ $(\lambda \in \mathbb{R})$
6) $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{R})$
7) $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u)$ $(\lambda,\mu \in \mathbb{R})$
8) $1.u=u$.

**Παραδείγματα:**
- Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων είναι διανυσματικός χώρος.
- Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ των διανυσμάτων του επιπέδου είναι διανυσματικός χώρος.

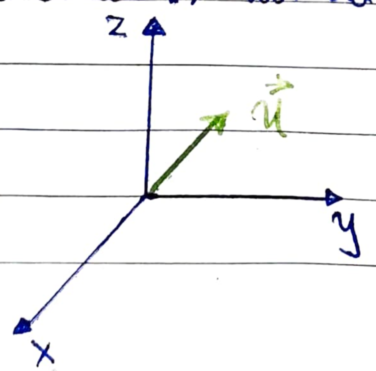
- $\mathbb{R}^2$:

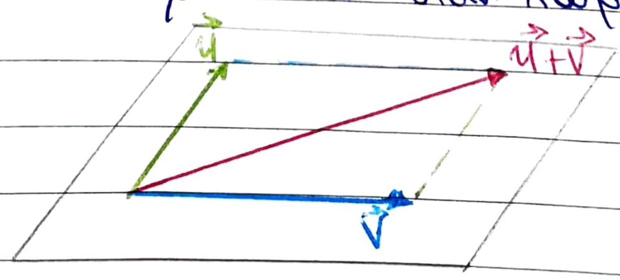


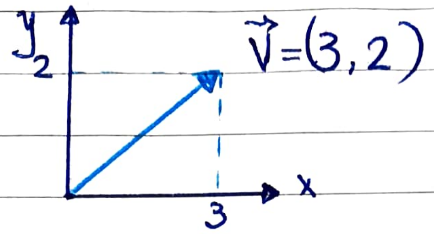




- Το σύνολο $\mathbb{R}^3$ των διανυσμάτων του χώρου είναι διαν. χώρος.



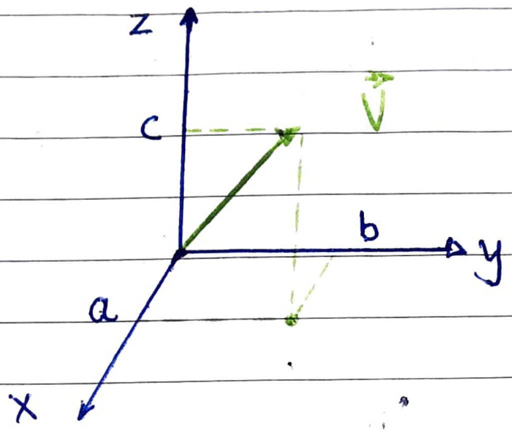



• $\mathbb{R}^2$ : $\vec{v}=(a,b)$




• $\mathbb{R}^3$ : $\vec{v}=(a,b,c)$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$




Γενικεύουμε σε οποιαδήποτε διάσταση ως εξής:
για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\boxed{\mathbb{R}^n}$ ως το σύνολο των στοιχείων της μορφής:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \text{ όπου } s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{R}.$$

Συμβολισμός:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \vec{v} = v = (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

Ορίζουμε:

• $$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + t_1 \\ s_2 + t_2 \\ \vdots \\ s_n + t_n \end{pmatrix}$$

• $$\lambda \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda s_1 \\ \lambda s_2 \\ \vdots \\ \lambda s_n \end{pmatrix}$$

Το $\mathbb{R}^n$ με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος και τα στοιχεία του τα λέμε διανύσματα.

**Ορισμός:**
Έστω $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Το διάνυσμα $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_m$ και λέμε ότι το $u$ παράγεται από τα $v_1, v_2, \dots, v_m$.

**Παραδείγματα:**

- Στον $\mathbb{R}^2$: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$3v_1 + v_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Στον $\mathbb{R}^3$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_1 - v_2 + 2v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Στον $\mathbb{R}^n$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Κάθε διάνυσμα $v$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός διανυσμός των $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$v = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} =$$

$$= s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + s_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = s_1 \cdot e_1 + s_2 \cdot e_2 + \dots + s_n \cdot e_n.$$

Ορισμός:
Έστω $v_1, v_2, \dots, v_m$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδιασμών των $v_1, v_2, \dots, v_m$ συμβολίζεται:

$$\boxed{\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}}$$

λέγεται χώρος που παράγεται από το $v_1, v_2, \dots, v_m$

Π.χ: Είδαμε ότι:

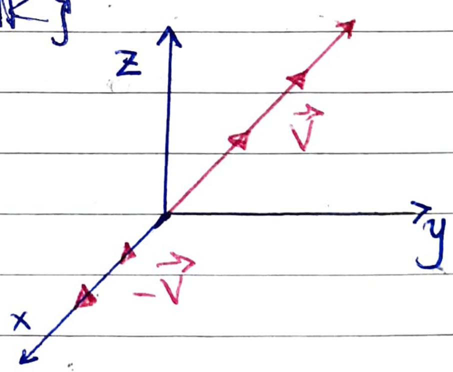
- $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
- $\text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$

Γεωμετρική Ερμηνεία (στον $\mathbb{R}^3$)

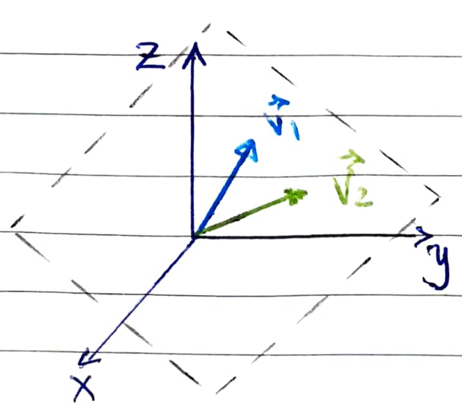
1) Έστω $v \in \mathbb{R}^3$

$$\text{Span}\{v\} = \{\lambda v \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

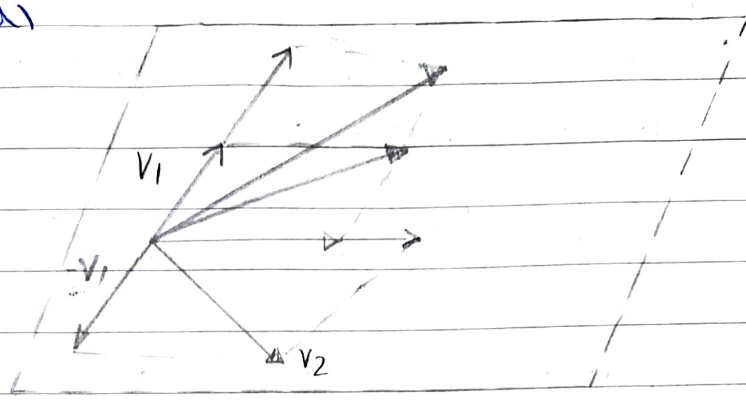
Στον $\mathbb{R}^3$ το $\text{Span}\{\vec{v}\}$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στο $v$.




2) Έστω $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$



Το Span $\{v_1, v_2\}$ είναι επίπεδο το οποίο περιέχει τα $v_1, v_2$




Π.Χ.:

Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Να ελεγχθεί αν το $b \in$ Span $\{v_1, v_2\}$ όπου $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$b \in$ Span $\{v_1, v_2\} \Leftrightarrow$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $b = x_1 v_1 + x_2 v_2$.

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 = 4 \\ -5x_1 + 6x_1 = -3 \end{array} \Rightarrow \text{έχει λύση}$$

Ελέγχουμε αν το παραπάνω σύστημα έχει λύση

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{πρέπει να γίνει κλιμακωτός.}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $x_2 = 2$

$$x_1 + 2x_2 = 7 \Rightarrow x_1 = 3$$

Άρα $b \in Span\{v_1, v_2\}$ και $3v_1 + 2v_2 = 5$