2/10/20

Κεφάλαιο 3 – Ο Χώρος R^n

Ορισμός: Έστω ένα μη κενό σύνολο V στο οποίο έχουμε δύο πράξεις:

- Πρόσθεση
- Πολλαπλασιασμός με πραγματικό αριθμό

• Το V λέγεται διανυσματικός χώρος αν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

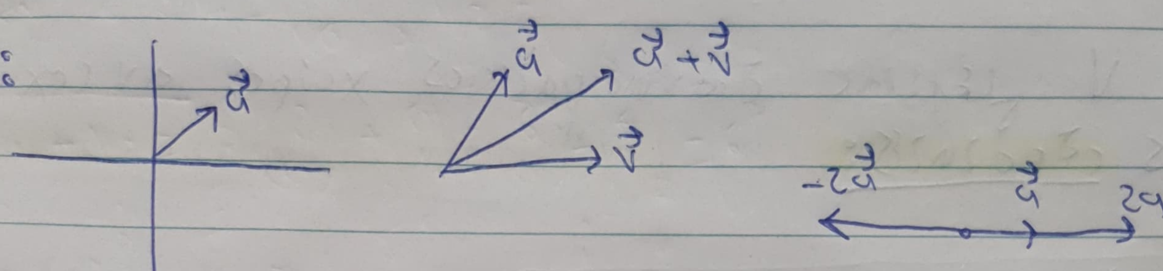
1) $u + v = v + u$
2) $u + (v + w) = (u + v) + w$
3) Υπάρχει στοιχείο $0 \in V$ ώστε για κάθε $v \in V$
$0 + v = v + 0 = v$
4) Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $-v \in V$ ώστε
$v + (-v) = (-v) + v = 0$
5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
8) $1u = u$

Παραδείγματα:

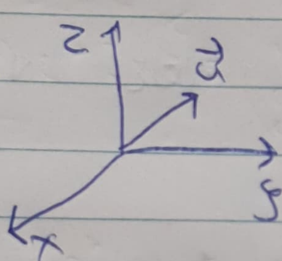
• Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων είναι διανυσματικός χώρος.

• Το σύνολο R^2 των διανυσμάτων του επιπέδου είναι διανυσματικός χώρος.

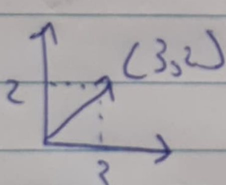
• R^2:



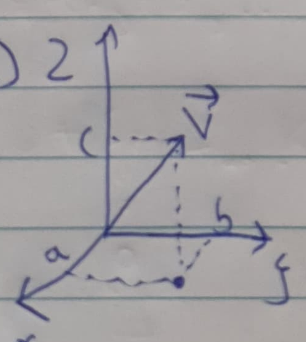
• R^3:



• R^2: $\vec{v}(a,b)$



• R^3: $\vec{v}(a,b,c)$



Γενικεύουμε σε οποιαδήποτε διάσταση ως εξής:
Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{R}^n$ ως το σύνολο των στοιχείων της μορφής

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \text{ όπου } s_1, s_2, \dots s_n \in \mathbb{R}$$

Συμβολισμός:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \vec{v} = v = (s_1, s_2, \dots s_n)$$

Ορίζουμε:

- $$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + t_2 \\ s_2 + t_2 \\ \vdots \\ s_n + t_n \end{pmatrix}$$

- $$\lambda \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda s_1 \\ \lambda s_2 \\ \vdots \\ \lambda s_n \end{pmatrix}$$

Το $\mathbb{R}^n$ με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος και τα στοιχεία του τα λέμε διανύσματα.

Ορισμός: Έστω $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Το διάνυσμα $a = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1, v_2, \dots, v_m$ και λέμε ότι το a **παράγεται** από τα $v_1, v_2, \dots, v_m$

Παραδείγματα:

- **Στον $\mathbb{R}^2$:** $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$3v_1 + v_2 = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Στον $\mathbb{R}^3$:** $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_1 - v_2 + 2v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Στον $\mathbb{R}^n$:** $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Κάθε διάνυσμα v στον $\mathbb{R}^n$ είναι **γραμμικός συνδυασμός** των $e_1, e_2, \dots, e_n$

$$v = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \begin{pmatrix} s_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + s_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = s_1 e_1 + s_2 e_2 + \dots + s_n e_n$$

Ορισμός: Έστω $v_1, v_2, \dots v_m$ διανύσματα στον R^n. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $v_1, v_2, \dots v_m$ συμβολίζεται:

$$\boxed{Span\{v_1, v_2, \dots v_m\}}$$

λέγεται χώρος που παράγεται από τα $v_1, v_2, \dots v_m$.

π.χ.: Είδαμε ότι: $\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} \in Span\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

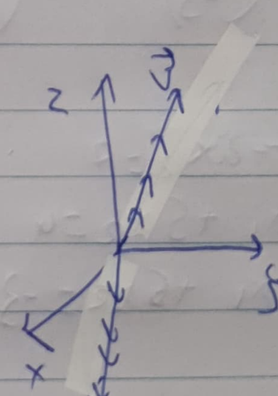
- $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \in Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

- $Span\{e_1, e_2, \dots e_n\} = R^n$

Γεωμετρική ερμηνεία (στον R^3)

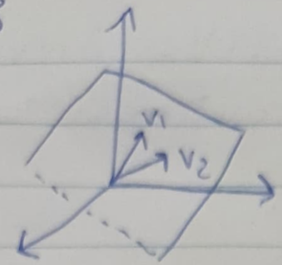
1) Έστω $v \in R^3$

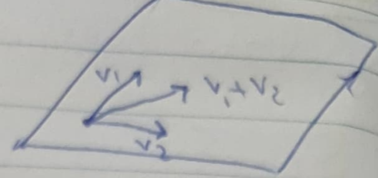
$Span\{v\} = \{\lambda v \mid \lambda \in R\}$



- Στον R^3 το $Span\{\vec{v}\}$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στο $\vec{v}$.

2) Έστω $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$





Το $\text{Span}\{v_1, v_2\}$ είναι επίπεδο το οποίο περιέχει τα v_1, v_2.

• Παράδειγμα: Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ να εξετάσει αν $b \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$ όπου $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$b \in \text{Span}\{v_1, v_2\} \iff$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $b = x_1 v_1 + x_2 v_2$

→ Προϋπόθεση αλγεβρικά.

$$\Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 = 4 \\ -5x_1 + 6x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{έχει λύση}$$

→ Ελέγχουμε αυτό το παραπάνω σύστημα αν έχει λύσεις.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{γραμμικώς}} \cdots \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 2 ηγετικά 1 και 2 μεταβλητές $\Rightarrow$ μοναδική λύση

→ Πίσω αντικατάσταση $\Rightarrow x_2 = 2$ και $x_1 + 2x_2 = 7 \Rightarrow x_1 = 3$

Άρα $b \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$ και $3v_1 + 2v_2 = b$