06/10

Υπενθ:

Γραμμικός συνδιασμός των $V_1, V_2, \dots, V_n$ οποιαδήποτε έκφραση της μορφής $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n$

$Span\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ = όλοι οι γραμμικοί συνδιασμοί των $V_1, V_2, \dots, V_n$

π.χ.

Έστω $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Να ελεγχθεί αν το $W = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ είναι στο $Span\{V_1, V_2\}$

$W \in Span\{V_1, V_2\} \Leftrightarrow$ υπάρχουν $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $X_1 V_1 + X_2 V_2 = W$

$$\Leftrightarrow X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ 2X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6X_2 \\ 4X_2 \\ 2X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ το γραμμικό σύστημα
$$\begin{aligned} X_1 + 6X_2 &= 4 \\ 2X_1 + 4X_2 &= -1 \\ -X_1 + 2X_2 &= 8 \end{aligned}$$

έχει λύση.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & | & 4 \\ 2 & 4 & | & -1 \\ -1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & | & 4 \\ 0 & -8 & | & -9 \\ 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \to \text{Μη συμβιβαστό}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & | & 4 \\ 0 & -8 & | & -9 \\ 0 & 8 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & | & 4 \\ 0 & -8 & | & -9 \\ 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Άρα $w \notin Span\{V_1, V_2\}$

Θεώρημα:

διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για $V_1, V_2, \dots, V_n$ $b \in \mathbb{R}^n$:

(I) Το b είναι γραμμικός συνδιασμός των $V_1, V_2, \dots, V_n$

(II) $b \in Span\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$

(III) Το γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα $[V_1, V_2, \dots, V_n | b]$ είναι συμβιβαστό.

Παραδείγματα:

1) Έστω $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Να ελεγχθεί αν το $Span\{V_1, V_2, V_3\} = \mathbb{R}^3$.

$Span\{V_1, V_2, V_3\} = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ Για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$ το γραμμικό σύστημα $[V_1, V_2, V_3 | b]$ είναι συμβιβαστό

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & | & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & | & b_3 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα

$\Longrightarrow$ Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.

Αντ. πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots$$

Δεν είναι αντιστρέψιμος (γιατί;)

Άρα $Span\{V_1, V_2, V_3\} \neq \mathbb{R}^3$

2) Έστω $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Για ποιές τιμές του h έχουμε $b \in Span\{V_1, V_2\}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -3+2h \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2h+7 \end{array}\right)$$

Το σύστημα με επαυξημένο πίνακα $[V_1 \ V_2 | b]$ είναι συμβιβαστό όταν $2h+7=0$

$\Rightarrow h = -7/2$

Άρα $b \in Span\{V_1, V_2\}$ για $h = -7/2$

Να βρεθεί ~~πε~~ ο γραμμικός συμβιβαστός

Σε αυτή την περίπτωση η λύση είναι

$x_2 = -5$

$x_1 = h + 3x_2 = -37/2$

Άρα $b = \dfrac{-37}{2} V_1 - 5 V_2$.

3) Να βρεθεί το Span$\{V_1, V_2, V_3\}$ όπου:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ελέγχουμε για ποιά $b \in \mathbb{R}^3$ ο πίνακας $[V_1\ V_2\ V_3 \mid b]$ δίνει συμβιβαστό πίνακα.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & 7 & b_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - 1/2\, b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

Άρα είναι συμβιβαστό όταν $b_1 - 1/2\, b_2 + b_3 = 0$

$$\text{Span}\{V_1, V_2, V_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b_1 - 1/2\, b_2 + b_3 = 0 \right\}$$

Χώρος στηλών πίνακα:

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$

Γράφουμε τις στήλες ως διανύσματα του $\mathbb{R}^m$

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, C_n = \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Αν $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ τότε μπορούμε να γράψουμε το γινόμενο $A.X$ ως $x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n$

Πράγματι:

$$x_1c_1+x_2c_2+\cdots+x_nc_n = x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots \\ a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}x_1\\ \vdots \\ a_{m1}x_1\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}a_{1n}x_n\\ \vdots \\ a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n\\ \vdots & + & \cdots & + & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=AX$$

Άρα το γραμμικό σύστημα $AX=b$ έχει λύση $\Leftrightarrow$ υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ώστε $x_1c_1+x_2c_2+\cdots+x_nc_n=b$
$\Leftrightarrow$ b είναι γραμμικός συνδυασμός των $c_1, c_2, \ldots, c_n$
$\Leftrightarrow$ $b \in \operatorname{Span}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$

Ορισμός:
Ο χώρος στηλών ενός πίνακα A είναι το σύνολο

$$\operatorname{col}(A)=\operatorname{Span}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$

Όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ οι στήλες του A.

Θεώρημα:
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για έναν $m\times n$ πίνακα A:
(I) Για κάθε $b\in\mathbb{R}^m$ η εξίσωση $AX=b$, έχει λύση.
(II) Κάθε $b\in\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.
(III) $\operatorname{col}(A)=\mathbb{R}^m$
(IV) Η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή.

$$\begin{pmatrix}* & * & *\\ 0 & * & *\\ 0 & 0 & *\end{pmatrix}$$, ενώ ανηγμένος κλιμακωτός $$\begin{pmatrix}* & 0 & 0\\ 0 & * & 0\\ 0 & 0 & *\end{pmatrix}$$

Παρατήρηση:

Υπάρχει περίπτωση $A \sim B$ αλλά $col(A) \neq col(B)$

Π.Χ.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A \sim B$$

γραμμοϊσοδύναμη.

$$col(A) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$$

$$col(B) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in col(A), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin col(B).$$

Χώρος λύσεων ομογενών συστημάτων

Ένα ομογενές σύστημα $AX = 0$

↳ έχει μοναδική λύση την $X = 0$ ή

↳ έχει άπειρες λύσεις.

Γράφοντας σαν $Span\{\dots\}$

Π.Χ.:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_2]{R_2 \to 1/3 R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to 1/3 R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ανηγμένος

Άπειρες λύσεις : $x_2 = 0$

$x_1 = \frac{4}{3} x_3$

Δηλαδή οι λύσεις είναι $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3\, x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Δηλ οι λύσεις είναι το σύνολο Span $= \left\{ \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Π.Χ: $3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7$

$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1$

$6x_1 + x_2 - 8x_3 = -4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_2]{R_2 \to 1/3\, R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1/3]{R_1 \to R_1 - 5R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άπειρες λύσεις : $x_2 = 2$, $x_1 = -1 + 4/3\, x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 4/3\, x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{λύσεις της ομογενούς}}$$