6/10/20 Ενδιάμεσα, όχι μέχρι Παρασκευή 9/10/20
Επανάληψη Τρίτη 13/10/20.

· Γραμμικοί συνδυασμοί των $v_1, v_2, \dots, v_n$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_n v_n$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R})$

· Span$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ = όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των $v_1, v_2, \dots, v_n$

· Παράδειγμα: Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Να ελεγχθεί αν το $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ είναι στο

Span$\{v_1, v_2\}$

$w \in$ Span$\{v_1, v_2\}$ $\Leftrightarrow$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε
$x_1 v_1 + x_2 v_2 = w$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6x_2 \\ 4x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ Το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ μη συμβιβαστό και το w δεν ανήκει στο Span$\{v_1, v_2\}$

Θεώρημα: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για $v_1, v_2, \dots v_n$ και $b \in \mathbb{R}^n$:

I) Το b είναι γραμμοσυνδυασμός των $v_1, v_2 \dots v_n$

II) $b \in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots v_n\}$

III) Το γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα $[v_1, v_2, \dots v_n | b]$ είναι συμβιβαστό.

Παραδείγματα:

1) Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Να εξεταστεί αν το $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$

$\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3 \iff$ Για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$ το γρ. σύστημα $[v_1, v_2, v_3 | b]$ είναι συμβιβαστό

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{array}\right]$$

Θεώρημα αντιστρέψιμου πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \dots$$

Δεν είναι αντιστρέψιμος
άρα δεν ισχύει η ισοδυναμία
άρα το $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} \neq \mathbb{R}^3$

2) Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Για ποιες τιμές του h έχουμε $b \in Span\{v_1, v_2\}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2h+7 \end{array}\right)$$

Εαν $2h+7=0$ τότε το επαυξημένο σύστημα είναι συμβιβαστό $\Rightarrow h=-\frac{7}{2}$. Άρα $b \in Span\{v_1, v_2\}$ για $h=-\frac{7}{2}$

Λύση: $x_2 = -5$

$x_1 = h + 3x_2 = -37/2$

Άρα $b = -\frac{37}{2} v_1 - 5v_2$

3) Να βρεθεί το $Span\{v_1, v_2, v_3\}$ όπου $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Ελέγχουμε για ποια b στον $\mathbb{R}^3$ ο πίνακας $[v_1 v_2 v_3 | b]$ είναι συμβιβαστό σύστημα.

← δεν είναι ακριβώς αλγεβρικά αλλά μας ικανοποιεί

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & 7 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2+4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1-\frac{1}{2}b_2+b_3 \end{array}\right]$$

Άρα συμβιβαστό όταν $b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0$

$$Span\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0 \right\}$$

Χώρος στηλών πίνακα

Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Γράφουμε τις στήλες ως διανύσματα του $\mathbb{R}^n$

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Αν $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ τότε μπορούμε να γράψουμε το γινόμενο AX ως εξής:

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots x_nC_n$$

Παράγραφη:

$$x_1C_1 \ldots + x_nC_n = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = AX$$

Άρα το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ έχει λύσεις
$\Leftrightarrow$ υπάρχουν $x_1, x_2, \dots x_n$ ώστε $x_1c_1 + x_2c_2 \dots + x_nc_n = b$
$\Leftrightarrow$ b είναι γραμμ. συνδυασμός των $c_1, c_2, \dots, c_n$
$\Leftrightarrow$ $b \in \text{Span}\{c_1, c_2, \dots c_n\}$

Ορισμός: Ο χώρος στηλών ενός πίνακα A είναι το σύνολο $\text{Col}(A) = \text{Span}\{c_1, c_2, \dots c_n\}$ όπου $c_1, c_2, \dots c_n$ οι στήλες του A.

Θεώρημα: Το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $b \in \text{Col}(A)$

Θεώρημα: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για ένα $m \times n$ πίνακα A.

I) Για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ η εξίσωση $Ax=b$ έχει λύση

II) Κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ είναι γρ. συνδυασμός των στηλών του A

III) $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$

IV) Η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή

$Ax=b$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} x & - & - & - \\ 0 & x & - & - \\ 0 & 0 & \ddots & - \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \; - \end{array}\right]$$

Παρατήρηση: Υπάρχει περίπτωση $A \sim B$ αλλά $Col(A) \neq Col(B)$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (γραμμοϊσοδύναμος)

$A \sim B$

$Col(A) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

$Col(B) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Col(A)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin Col(B)$

Χώρος λύσεων ομογενών συστημάτων:

Ένα ομογενές σύστημα $AX = 0$
→ Έχει μοναδική λύση του $X = 0$ ή
→ Έχει άπειρες λύσεις, Γράφονται σαν $Span\{\dots\}$

π.χ. $3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$
$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$
$6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Άπειρες λύσεις $x_2 = 0$
$x_1 = \frac{4}{3} x_3$

→

Δηλαδή οι λύσεις είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3\, x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή οι λύσεις είναι το σύνολο $\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

π.χ. $3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -7$

$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1$

$6x_1 + x_2 - 8x_3 = -4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & 8 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άπειρες λύσεις: $x_2 = 3$, $x_1 = -1 + \frac{4}{3} x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4/3\, x_3 \\ 3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{λύσεις ομογενούς}}$$