Παρατηρηση

Ειναι πιθανον για δυο πινακες A,B $A \neq 0$ και $B \neq 0$ ενω $AB = 0$

π.χ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi$$

Ορισμος

Αν ο A ειναι τετραγωνικος πινακας, το ιχνος του A, trA, ειναι το αθροισμα των στοιχειων της κυριας διαγωνιου

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad trA = 1 + 4 = 5$

Αναστροφος πινακας

Αν ο A ειναι $m \times n$ πινακας τοτε ο αναστροφος του συμβολιζεται με A^T και ειναι ο $n \times m$ πινακας που προκυπτη κανοντας τις γραμμες του A στηλες και τις στηλες του A γραμμες.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Αν $A = (a_{ij})$ τοτε $A^T = (a_{ji})$

ιδιοτητες

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Ειδικοι τετραγωνικοι πινακες

1) Διαγωνιος: Καθε στοιχειο εκτος της κυριας διαγωνιου = 0

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, I_n

2) Ανω τριγωνικος: Καθε στοιχειο κατω απο την κυρια διαγωνιο = 0

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

3) Κατω τριγωνικος: Ολα τα στοιχεια πανω απο την κυρια διαγωνιο = 0

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

4) Συμμετρικος: Οταν $A = A^T$, δηλ. η κυρια διαγωνιος ειναι αξονας συμμετριας.

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

5) Αντισυμμετρικος: Οταν $A = -A^T$, δηλ. στοιχεια κυριας διαγωνιου = 0, συμμετρικα στοιχεία αντιθετα

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -A^T = A$

Ιδιοτητες

1) Ο αναστροφος ενος ανω τριγωνικου πινακα ειναι κατω τριγ.

2) Ο αναστροφος ενος κατω τριγωνικου πινακα ειναι πανω τριγωνικος.

3) Αν ο A ειναι συμμετρικος τοτε και ο A^T ειναι συμμετρικος
$(A^T)^T = A = A^T$

4) Αν οι A,B ειναι συμμετρικοι τοτε και $A \pm B$ ειναι συμμετρικοι

5) Αν ο A ειναι συμμετρικος και $\lambda \in \mathbb{R}$ τοτε και ο λA ειναι συμμετρικος.

Παρατηρηση:
Ειναι πιθανον οι A,B να ειναι συμμετρικοι ενω ο AB να μην ειναι συμμετρικος

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = A$, $B^T = B$

$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $AB^T \neq AB$

Θεωρημα:
Εστω A,B συμμετρικοι πινακες Ο AB ειναι συμμετρικος αν και μονο αν $AB = BA$

Αποδειξη

$$
\begin{aligned}
AB \text{ συμμετρικος} &\Leftrightarrow (AB)^T = AB && \text{(ορισμος)} \\
&\Leftrightarrow B^T A^T = AB && \text{(ιδιοτητες αναστροφου)} \\
&\Leftrightarrow BA = AB && \text{(A,B συμμετρικοι)}
\end{aligned}
$$

Θεωρημα:
Αν A,B ειναι συμμετρικοι τετραγωνικοι πινακες τοτε ο $AB-BA$ ειναι αντισυμμετρικος

Αποδειξη

$$
\begin{aligned}
(AB-BA)^T = (AB)^T - (BA)^T &= B^T A^T - A^T B^T \\
&= BA - AB \\
&= -(AB - BA)
\end{aligned}
$$

Αντιστρεψιμοι πινακες

Ορισμος:
Ενας αντιστρεψιμος πινακας A λεγεται αντιστρεψιμος αν υπαρχει πινακας B ιδιων διαστασεων ωστε $AB = BA = I$
Ο B συμβολιζεται με A^{-1}

π.χ Ο $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ειναι αντιστρεψιμος με $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

διοτι $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Παρατηρηση
Υπαρχουν τετρ. πινακες που δεν ειναι αντιστρεψιμοι

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

διοτι οι B οποιοσδηποτε 3x3 πινακας ο BA εχει μηδενικα στην τριτη στηλη

Οριςμος:
Ενας πινακας που δεν ειναι αντιστρεψιμος λεγεται ιδιαζων

Θεωρημα: (μοναδικοτητα του αντιστροφου)
Ο αντιστροφος ενος πινακα A αν υπαρχει ειναι μοναδικος.

Θεωρημα: (αντιστροφος 2x2 πινακας)
Ο πινακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ειναι αντιστρεψιμος αν και μονο αν

$ad - bc \neq 0$ και $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

ο A ειναι αντιστρεψιμος διοτι $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -5/7 & 6/7 \end{pmatrix}$

ο B δεν ειναι αντιστρεψιμος διοτι $(-1)(-6) - (2 \cdot 3) = 0$

Οριςμος
Ενας τετραγωνικος πινακας A λεγεται ορθογωνιος αν $AA^T = A^T A = I$*, δηλ. A^T ειναι ο αντιστροφος του A

*αποδεικνυεται οτι μια απο τις δυο ιδιοτητες αρκει

π.χ. $A = \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} -3/7 & -6/7 & 2/7 \\ 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 6/7 & 2/7 & -3/7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, αρα ο A ειναι ορθογωνιος.