3) $A - A = A + (-A) = 0$

4) $0A = 0$

5) Αν $\lambda A = 0$ τότε $\lambda = 0$ ή $A = 0$

6) Για τετραγωνικό πίνακα $A$,

$$AI = IA = A$$

Παρατήρηση

Είναι πιθανό για δυο πίνακες $A$ και $B$ $A \neq 0$ $B \neq 0$ ενώ $AB = 0$

π.χ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Ορισμός: Αν ο $A$ είναι τετραγωνικός πίνακας, το ίχνος του $A$, $trA$, είναι το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $trA = 1 + 4 = 5$

Ανάστροφος πίνακας: Αν ο $A$ είναι $m \times n$ πίνακας τότε ο ανάστροφός του συμβολίζεται με $A^T$ και είναι ο $n \times m$ πίνακας που προκύπτει κάνοντας τις γραμμές του $A$ στήλες και τις στήλες του $A$ γραμμές

π.χ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Άρα Αν $A = (a_{ij})$ τότε $A^T = (a_{ji})$

Ιδιότητες

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Ειδικοί τετραγωνικοί πίνακες

(1) Διαγώνιος: Κάθε στοιχείο εκτός της κύριας διαγωνίου $=0$

π.χ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I_n$$

2) Άνω Τριγωνικός: κάθε στοιχείο κάτω την κύρια διαγώνιο $=0$

π.χ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Κάτω τριγωνικός: Όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο $=0$

π.χ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4) Συμμετρικός πίνακας: $A = A^T$ δηλαδή η κυρια διαγώνιος του είναι άξονας συμμετρίας

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

5) Αντισυμμετρικός: $A = -A^T \Rightarrow$ Στοιχεία κύριας διαγωνίου ισο με 0 και συμμετρικά στοιχεία αντίθετα

π.χ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad -A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad -A^T = A.$

## Ιδιότητες

(1) Ο ανάστροφος ενός άνω τριγωνικός πίνακα είναι κάτω τριγωνικός

(2) Ο ανάστροφος ενός κάτω τριγωνικός πίνακα είναι άνω τριγωνικός

(3) Αν ο $A$ είναι συμμετρικός τότε και ο $A^T$ είναι συμμετρικός $(A^T)^T = A = A^T$

(4) Αν οι $A, B$ είναι συμμετρικοί τότε και οι $A \pm B$ είναι συμμετρικοί

(5) Αν ο $A$ είναι συμμετρικός και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε και ο $\lambda A$ είναι συμμετρικός

* Παρατήρηση: Είναι πιθανό οι $A, B$ να είναι συμμετρικοί ενώ ο $AB$ να μην είναι συμμετρικός

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = A$ $\quad B^T = B$

$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad AB^T \neq AB$

---

Θεώρημα: Έστω ο $A, B$ συμμετρικοί τετραγωνικοί πίνακες. Ο $AB$ είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$

Απόδειξη: $AB$ συμμετρικός $\Leftrightarrow (AB)^T = AB$ (ορισμός)

$\Leftrightarrow B^T A^T = AB$ (ιδιότητες αναστρόφων)

$BA = AB$ ($A, B$ συμμετρικός)

Θεώρημα: Αν $A, B$ είναι συμμετρικοί τετραγωνικοί πίνακες τότε ο $AB - BA$ είναι αντισυμμετρικός

Απόδειξη: $(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T$

$B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -(AB - BA)$

## Αντιστρέψιμοι πίνακες:

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A$ λέγεται αντιστρέψιμος αν υπάρχει πίνακας $B$ ίδιων διαστάσεων ώστε $AB = BA = I$

Ο B συμβολίζεται με $A^{-}$

π.χ ο A είναι αντιστρέψιμος $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ με $A^{-} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

διότι $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Παρατήρηση: Υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες που δεν είναι αντιστρέψιμοι

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ διότι αν B οποιοσδήποτε $3\times3$ πίνακας ο AB έχει μηδενικό στην τρίτη στήλη

⇒ Ένας πίνακας ο οποίος δεν είναι αντιστρέψιμος λέγεται ασιάζων

Θεώρημα (μοναδικότητα του αντιστρόφου) Ο αντίστροφος του πίνακα A αν υπάρχει είναι μοναδικός

Θεώρημα: (αντίστροφος $2\times2$) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $ad - bc \neq 0$

και $A^{-} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

π.χ

$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

Ο A είναι αντιστρέψιμος διότι $6\cdot2 - 5\cdot1 = 7 \neq 0$

$A^{-} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -5/7 & 6/7 \end{pmatrix}$ *Ο B δεν είναι διότι $(-1)\cdot(-6) - 2\cdot3 = 0$

Ορισμός: Ένας πίνακας A λέγεται ορθογώνιος $AA^T = A^TA = I^*$ δηλαδή $A^T$ είναι ο αντίστροφός του

* αποδεικνύεται ότι μια από τις δυο ισότητες αρκεί

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} -3/7 & -6/7 & 2/7 \\ 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 6/7 & 3/7 & -3/7 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα ο A είναι ορθογώνιος