Θεώρημα (αντίστροφος γινομένου)

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Απόδειξη: $AB(B^{-}A^{-}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = AA^{-1} = I$

$(B^{-}A^{-})\cdot(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$

$= (B^{-1}I)\cdot B = B^{-1}B = I$

Δυνάμεις πινάκων

$A^0 = I$

Για $n \in \mathbb{N}, (n>0)$ $A^n = \overbrace{A\cdot A \dots A}^{n}$ $\quad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}\cdot A^{-1}\dots A^{-1}}_{n}$

Ιδιότητες: $A^r\cdot A^s = A^{r+s}$

$(A^r)^s = A^{rs}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

- Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A^n είναι αντιστρέψιμος με $(A^n)^{-1} = A^{-n}$
- Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και A αντιστρέψιμος τότε και ο λA είναι αντιστρέψιμος και $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

Παρατήρηση: Όταν έχουμε ταυτότητες πινάκων ο πολλαπλ/σμός δεν είναι μεταθετικός $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ✗

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ ✓

Θεώρημα: (αντίστροφος ανάστροφου)

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε και ο A^T είναι αντιστρέψιμος με $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

* Στόχος: Να βρούμε αλγόριθμο που να δίνει τον αντίστροφο πίνακα

Scanned with CamScanner

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών (ΣΜΓ)

1. Εναλλαγή της γραμμής i με την γραμμή j ενός πίνακα ($R_i \leftrightarrow R_j$)
2. Πολ/σμός της i γραμμής με μη μηδενική σταθερά $\lambda \in R$ ($R_i \to \lambda R_i$)
3. Πρόσθεση πολ/σίου της i γραμμής στην j γραμμή. ($R_j \to R_j + \lambda R_i$)

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -2R_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Κάθε ΣΜΓ αντιστοιχεί σε πολ/σμό με ένα πίνακα που προκύπτει κάνοντας την ίδια πράξη στον ταυτοτικό

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -2R_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ορισμός: Ένας πίνακας λέγεται στοιχειώδης όταν προκύπτει από τον ταυτοτικό με εφαρμογή ενός ΣΜΓ.

Η εφαρμογή ΣΜΓ σε έναν πίνακα είναι ο πολλαπλασιασμός του πίνακα (από αριστερά) με τον αντίστοιχο στοιχειώδη.

Θεώρημα: Οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό με αντίστροφο ΣΜΓ

ΣΜΓ	Αντίστροφος ΣΜΓ
$R_i \to \lambda R_i$	$R_i \to \frac{1}{\lambda} R_i$
$R_i \leftrightarrow R_j$	$R_i \leftrightarrow R_j$
$R_i \to R_i + \lambda R_j$	$R_i \to R_i - \lambda R_j$

π.χ. $E = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

πράγματι

$$EE^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1}E = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Κλιμακωτοί και ανηγμένοι πίνακες

(Για κάθε πίνακα, όχι μόνο τετραγωνικό)

⇒ Ένας πίνακας λέγεται κλιμακωτός αν ισχύουν οι 3 παρακάτω συνθήκες:

1. Αν μια γραμμή δεν αποτελείται μόνο από 0 τότε το πρώτο της στοιχείο είναι 1

2. Όσες γραμμές αποτελούνται μόνο από 0 βρίσκονται στο κάτω μέρος του πίνακα

3. Αν υπάρχουν δυο διαδοχικές γραμμές με μη διαδοχικά στοιχεία τότε το ηγετικό 1 της πρώτης βρίσκεται πιο αριστερά από το ηγετικό 1 της δεύτερης

Ο πίνακας A λέγεται ανηγμένος κλιμακωτός αν ισχύουν τα 3 παραπάνω και επιπλέον

4) κάθε στήλη που περιέχει ηγετικό 1 έχει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία 0.

π.χ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ κλιμακωτός (όχι ανηγμένος)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ανηγμένος κλιμακωτός

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ όχι κλιμακωτός