20 Μέθοδος απαλοιφής

Έστω A ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

→ Όσες μεταβλητές αντιστοιχούν σε ηγετικό 1 λέγονται κύριες μεταβλητές οι υπόλοιπες λέγονται ελεύθερες.

1η περίπτωση: Υπάρχει στον A γραμμή της μορφής $[0\ 0\ 0 \ldots | b]$ $b \neq 0$. Τότε το σύστημα είναι μη συμβιβαστό (δεν έχει καμία λύση)

2η περίπτωση: Δεν ισχύει η πρώτη και έχουμε τόσα ηγετικά 1 όσες και οι μεταβλητές (δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές). Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

3η περίπτωση: Δεν ισχύει η πρώτη και το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών είναι μικρότερο από τις μεταβλητές (υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές)
Τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις που εκφράζονται παραμετρικά (με παραμέτρους τις ελεύθερες μεταβλητές)

Παράδειγμα: Οι παρακάτω πίνακες προέκυψαν από επαυξημένους πίνακες γραμμικών συστημάτων. Τι συμπεραίνετε για τις λύσεις τους;

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ έχει γραμμή $(0,0,0|1)$ άρα μη συμβιβαστό

ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ άπειρες λύσεις ($x_3$ ελεύθερη μεταβλητή)

iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ άπειρες λύσεις ($x_2, x_3$ ελεύθερες μεταβλητές)

* Παρατήρηση: Αν το σύστημα είναι ομογενές δεν υπάρχει γραμμή της μορφής $(0\,0\,0|h)$ $h \neq 0$ άρα πάντα υπάρχει τουλάχ. μια λύση

Αν σε ομογενές γραμμικό σύστημα έχουμε περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις τότε έχει άπειρες λύσεις.

Επίλυση με αντίστροφο πίνακα

→ Έστω το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$ εξισώσεις με n αγνώστους

Scanned with CamScanner

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$ πίνακας συντελεστών του συστήματος

$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως $Ax = b$

Αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος τότε πολλαπλασιάζουμε με τον $A^{-1}$ από αριστερά

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$
$$I_n x = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

Θεώρημα: Αν $n \times n$ πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος τότε το γρ. σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση τη $x = A^{-1}b$ (μοναδική λύση διότι αν $x_1$ είναι άλλη λύση τότε $Ax_1 = b \Rightarrow A^{-1}b \Rightarrow x_1 = A^{-1}b \quad b = x$)

Παράδειγμα: Να λυθεί το γρ. σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 17 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 8 & 17 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

με $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

δηλ. $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$

## Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα

(I) Ο $A$ είναι αντιστρέψιμος

(II) Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $A$ είναι ο $I_n$

(III) Ο $A$ είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

(IV) Το ομογενές σύστημα $Ax=0$ έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη)

(V) Το σύστημα $Ax=b$ έχει μοναδική λύση την $x=A^{-1}b$ για κάθε $b$.

(I)⇒(IV) $Ax=0 \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}0 \Rightarrow x=0$

(IV)→I $Ax=0$ έχει μοναδική λύση ⇒ ο $A$ έχει τόσα ηγετικά 1 όσα οι στήλες του

⇒ Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του είναι ο $I_n$

I → (IV) $Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b$

V ⇒ (IV) ✓

**Θεώρημα:** Κάθε γραμμικό σύστημα έχει ακριβώς μια, ή καμία ή άπειρες λύσεις

Απόδειξη: Έστω ότι το σύστημα γράφεται $Ax=b$

Έστω $x_0, x_1$ δύο λύσεις του συστήματος $(x_0 \neq x_1)$. Άρα $Ax_1=b$ και $Ax_2=b$

Παρατηρούμε ότι $A(x_0-x_1) = Ax_0 - Ax_1 = b-b=0$

Για κάθε $\lambda \in R$ $A(x_1+\lambda x_2) = Ax_1 + A(\lambda(x_2)) = Ax_1 + \lambda(Ax_2) = b+\lambda\cdot 0 = b$

Δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις, Δηλαδή το $x_1+\lambda x_2$ είναι λύση του συστήματος για κάθε $\lambda \in R$

**Παράδειγμα επίλυσης με απαλοιφή:**

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$

$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = +2$

$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$

$3x_1 \qquad - 3x_4 = +3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & +3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3, x_4$ ελεύθερες μεταβλητές

Πίσω αντικατάσταση $x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 + x_4$

$= 1 + x_4$

Λύσεις $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + x_4, 2x_3, x_3, x_4)$