ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1. Δίνονται οι διαστάσεις των παρακάτω πέντε πινάκων:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4\times 5) & (4\times 5) & (5\times 2) & (4\times 2) & (5\times 4) \end{array}$$

Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πράξεις ορίζονται. Αν ναι, γράψτε τις διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει.

i) BA ii) $AC+D$ iii) $AE+B$ iv) $AB+B$
v) $E(A+B)$ vi) $E(AC)$ vii) EA viii) $(A+E)D$

Απάντηση: i) Δεν ορίζεται ii) 4×2 iii) Δεν ορίζεται iv) Δεν ορίζεται v) 5×5 vi) 5×2 vii) 5×5 viii) Δεν ορίζεται

2. Δίνονται οι παρακάτω πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους παρακάτω πίνακες (στις περιπτώσεις που ορίζονται).

i) $D+E$ ii) $D-E$ iii) $5A$ iv) $-7C$
v) $2B-C$ vi) $4E-2D$ vii) $-3(D+2E)$ viii) $A-A$
ix) AB x) BA xi) $(3E)D$ xii) $(AB)C$

Απάντηση:
i) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} -7 & -28 & 14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$ v) Δεν ορίζεται
vi) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ vii) $\begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}$ viii) Δεν ορίζεται ix) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ x) Δεν ορίζεται

3. Έστω οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να επαληθεύσετε ότι $AB=AC$, παρόλο που $B\neq C$.

4. Να βρεθούν οι αριθμοί a,b,c,d ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα.

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & d-2c \\ d+2c & -2 \end{bmatrix}$$

Απάντηση: $a=4, b=-6, c=-1, d=1$

5. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να προσδιορίσετε τον 4×4 πίνακα (a_{ij}) που ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη.

i) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i \neq j$

ii) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i > j$

iii) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i < j$

iv) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $|i - j| > 1$

Απάντηση: i) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$

6. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε έναν 2×2 μη μηδενικό πίνακα B τέτοιον ώστε $AB = 0$.

Απάντηση: $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. Ελέγξτε κατά πόσον οι παρακάτω πίνακες είναι συμμετρικοί.

i) $\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) Όχι ii) Όχι iii) Ναι

8. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$ να είναι συμμετρικός.

Απάντηση: $a = -8$

9. Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, να δείξετε τα παρακάτω.

i) Οι πίνακες AA^T και $A + A^T$ είναι συμμετρικοί.

ii) Ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.

10. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων.

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ iii) $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1/5 & 3/10 \\ -1/5 & 1/10 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

11. Να δείξετε ότι αν για τον αντιστρέψιμο τετραγωνικό πίνακα A ισχύει $A^2 - 3A + I = 0$, τότε $A^{-1} = 3I - A$.

12. Αν A, B και C είναι τρεις $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, έχει η εξίσωση

$$C^{-1}(A + X)B^{-1} = I$$

λύση X; Αν ναι, βρείτε το X.

13. Έστω P αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας και $A = PBP^{-1}$. Να λύσετε ως προς B.

Απάντηση: $B = P^{-1}AP$

14. Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις.

i) $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$

ii) $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$.

Απάντηση: i) B^{-1} ii) CD^{-1}

15. Να μετατραπούν οι πιο κάτω πίνακες σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -17 & 4 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/8 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & -22/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι κι αν ναι, βρείτε τον αντίστροφο τους.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

vi) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -3/35 & -1/7 & 0 \\ 41/35 & -5/7 & -1 \end{bmatrix}$ iv) Μη αντιστρέψιμος

v) Μη αντιστρέψιμος vi) $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & -3 & 0 \\ -1/8 & 1/4 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/40 & -1/20 & -1/10 & -1/5 \end{bmatrix}$

17. Να βρεθεί το $c \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος.

Απάντηση: $c \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$