

ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. i) Να μετατρέψετε τον παρακάτω πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

- ii) Αν ο πίνακας A είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος είναι το σύστημα συμβιβαστό; Αν ναι, βρείτε την γενική λύση.

Απάντηση: i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ii) Μη συμβιβαστό

2. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η λύση για τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα με μέθοδο απαλοιφής Gauss ή Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{lll} x_2 + 4x_3 = -5 & x_1 - 3x_3 = 8 & x - y + 2z - w = -1 \\ \text{i) } x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 & \text{ii) } 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 & \text{iii) } 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 & x_2 + 5x_3 = -2 & -x + 2y - 4z + w = 1 \\ & & 3x - 3w = -3 \end{array}$$

Απάντηση: i) Μη συμβιβαστό ii) $(5, 3, -1)$ iii) $(t - 1, 2s, s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$

3. Είναι το σύστημα

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_4 = -5 \end{array}$$

συμβιβαστό;

Απάντηση: Συμβιβαστό

4. Βρείτε μια αλγεβρική σχέση μεταξύ των g , h και k έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = g \\ 3x_2 - 5x_3 = h \\ -2x_1 + 5x_2 - 9x_3 = k \end{array}$$

να είναι μη συμβιβαστό.

Απάντηση: $2g + h + k \neq 0$

5. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες το σύστημα δεν έχει λύση, έχει ακριβώς μία λύση ή έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\3x - y + 5z &= 2 \\4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2\end{aligned}$$

Απάντηση: Άπειρες λύσεις για $a = 4$, καμία λύση για $a = -4$, μία λύση για $a \neq \pm 4$

6. Να βρεθεί η λύση (αν υπάρχει) για το σύστημα που έχει επαυξημένο πίνακα τον ακόλουθο.

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Απάντηση: $(3t - s, 4t + 1, s, 4 - 9t, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$

7. Προσδιορίστε αν τα παρακάτω συστήματα έχουν μη τετριμμένες λύσεις.

$$\begin{aligned}2x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ \text{i) } -2x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0\end{aligned} \quad \text{ii) } \begin{aligned}-3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

Απάντηση: i) Μη τετριμμένες λύσεις ii) Μη τετριμμένες λύσεις

8. Βρείτε το σύνολο λύσεων των παρακάτω συστημάτων.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ \text{i) } -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 0\end{aligned} \quad \text{ii) } \begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -3\end{aligned}$$

Απάντηση: i) $(5t, -2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ ii) $(-2 + 5t, 1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$

9. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο του αντιστρόφου πίνακα.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ \text{i) } 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3\end{aligned} \quad \text{ii) } \begin{aligned}5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

Απάντηση: i) $(-1, 4, -7)$ ii) $(1, -11, 16)$

Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια Creative Commons Αναφορά δημιουργού-Μη εμπορική-Παρόμοια διανομή 4.0 International License.

