

**ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας**  
**Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022**

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου - Β μέρος

1. Αν οι στήλες ενός  $7 \times 7$  πίνακα  $D$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τι μπορείτε να πείτε για τις λύσεις του  $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ;

**Απάντηση:** Συμβιβαστό για κάθε  $\mathbf{b}$ .

2. Προσδιορίστε αν τα πιο κάτω σύνολα είναι βάσεις του  $\mathbb{R}^2$  ή  $\mathbb{R}^3$ .

i)  $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

ii)  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

iii)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \right\}$

**Απάντηση:** i) Είναι ii) Είναι iii) Δεν είναι

3. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

- i) Είναι το  $\text{Nul}A$  υπόχωρος  $\mathbb{R}^3$  ή  $\mathbb{R}^4$ ?
- ii) Είναι το  $\text{Col}A$  υπόχωρος του  $\mathbb{R}^3$  ή  $\mathbb{R}^4$ ?
- iii) Βρείτε μία βάση του πυρήνα  $\text{Nul}A$  και προσδιορίστε την διάστασή του.
- iv) Βρείτε μία βάση του  $\text{Col}A$  και τον βαθμό του πίνακα  $A$ .

**Απάντηση:** i)  $\mathbb{R}^4$  ii)  $\mathbb{R}^3$  iii)  $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  iv)  $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

- i) Βρείτε μία βάση του πυρήνα  $\text{Nul}A$  και το nullity του  $A$ .
- ii) Βρείτε μία βάση του υποχώρου  $\text{Col}A$  του  $\mathbb{R}^4$  και την διάστασή του.

**Απάντηση:** i)  $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 1/2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  ii)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$

5. Έστω ο πίνακας

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ -4 & 12 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Βρείτε το  $\text{rank}E$ .

ii) Βρείτε την μηδενικότητα του  $E$ .

**Απάντηση:** i) 3 ii) 1

6. Έστω ο αντιστρέψιμος πίνακας:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Βρείτε το  $\text{Col}C$ .

ii) Βρείτε το  $\text{Nul}C$ .

**Απάντηση:** i)  $\mathbb{R}^4$  ii)  $\{\mathbf{0}\}$

7. Έστω  $F$  ένας  $5 \times 5$  πίνακας του οποίου ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του δεν είναι το  $\mathbb{R}^5$ . Τι μπορείτε να πείτε για τον μηδενικό χώρο του;

**Απάντηση:**  $\text{Nul}(A) \neq \{\mathbf{0}\}$

8. Βρείτε μία βάση του υποχώρου που παράγεται από τα διανύσματα:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

Ποια η διάσταση του υποχώρου;

**Απάντηση:**  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$

9. Έστω η βάση  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$  του υποχώρου  $H$  και  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} \in H$ . Βρείτε το διάνυσμα  $\mathcal{B}$ -συντεταγμένων του  $\mathbf{y}$ .

**Απάντηση:**  $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

**10.** Έστω η βάση  $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$  του υποχώρου  $K$  και  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix} \in K$ . Βρείτε το διάνυσμα  $[\mathbf{z}]_{\mathcal{E}}$ .

**Απάντηση:**  $\begin{bmatrix} 1/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}$

**11.** Θεωρούμε την απεικόνιση  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Βρείτε το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  του οποίου η εικόνα είναι  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$  και προσδιορίστε αν το  $\mathbf{x}$  είναι μοναδικό.

**Απάντηση:**  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

**12.** Βρείτε όλα τα  $\mathbf{x}$  που απεικονίζονται στο μηδενικό διάνυσμα μέσω του μετασχηματισμού  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Έστω  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Είναι το  $\mathbf{y}$  στο πεδίο τιμών του γραμμικού μετασχηματισμού  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ ;

**Απάντηση:**  $s \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ , το  $\mathbf{y}$  ανήκει στο πεδίο τιμών

**13.** Έστω  $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$  και  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το  $\mathbf{e}_1$  στο  $\mathbf{y}_1$  και το  $\mathbf{e}_2$  στο  $\mathbf{y}_2$ . Βρείτε τις εικόνες των  $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ .

**Απάντηση:**  $T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$ ,  $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$

**14.** Προσδιορίστε αν οι παρακάτω μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί:

i)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 4, 5x_2)$

ii)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3)$

**Απάντηση:** i) Όχι ii) Ναι

**15.** Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό.

i)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, T(\mathbf{e}_1) = (3, 1, 3, 1)$  και  $T(\mathbf{e}_2) = (-5, 2, 0, 0)$ , όπου  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  και  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ .

ii)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  απεικονίζει το  $\mathbf{e}_1$  στο  $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$  και αφήνει το  $\mathbf{e}_2$  αναλλοίωτο.

**Απάντηση:** i)  $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ii)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

**16.** Έστω  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$ .

i) Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό  $T$ .

ii) Προσδιορίστε αν ο  $T$  είναι (α) 1 - 1, (β) επί.

**Απάντηση:** i)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  ii) Δεν είναι 1-1, δεν είναι επί

**17.** Έστω  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$ .

i) Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό  $T$ .

ii) Προσδιορίστε αν ο  $T$  είναι (α) 1 - 1, (β) επί.

**Απάντηση:** i)  $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$  ii) Δεν είναι 1-1, είναι επί

