

ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1. Δίνονται οι διαστάσεις των παρακάτω πέντε πινάκων:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4 \times 5) & (4 \times 5) & (5 \times 2) & (4 \times 2) & (5 \times 4) \end{array}$$

Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πράξεις ορίζονται. Αν ναι, γράψτε τις διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει.

- | | | | |
|---------------|--------------|---------------|------------------|
| i) BA | ii) $AC + D$ | iii) $AE + B$ | iv) $AB + B$ |
| v) $E(A + B)$ | vi) $E(AC)$ | vii) EA | viii) $(A + E)D$ |

2. Δίνονται οι παρακάτω πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους παρακάτω πίνακες (στις περιπτώσεις που ορίζονται).

- | | | | |
|-------------|---------------|-------------------|---------------|
| i) $D + E$ | ii) $D - E$ | iii) $5A$ | iv) $-7C$ |
| v) $2B - C$ | vi) $4E - 2D$ | vii) $-3(D + 2E)$ | viii) $A - A$ |
| ix) AB | x) BA | xi) $(3E)D$ | xii) $(AB)C$ |

3. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να επαληθεύσετε ότι $AB = AC$, παρόλο που $B \neq C$.

4. Να βρεθούν οι αριθμοί a, b, c, d ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα.

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d - 2c \\ d + 2c & -2 \end{bmatrix}$$

5. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να προσδιορίσετε τον 4×4 πίνακα (a_{ij}) που ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη.

- i) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i \neq j$
- ii) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i > j$
- iii) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i < j$
- iv) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $|i - j| > 1$

6. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε έναν 2×2 μη μηδενικό πίνακα B τέτοιον ώστε $AB = 0$.

7. Ελέγξτε κατά πόσον οι παρακάτω πίνακες είναι συμμετρικοί.

i) $\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

8. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$ να είναι συμμετρικός.

9. Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, να δείξετε τα παρακάτω.

i) Οι πίνακες AA^T και $A + A^T$ είναι συμμετρικοί.

ii) Ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.

10. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων.

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

iii) $C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

11. Να δείξετε ότι αν για τον αντιστρέψιμο τετραγωνικό πίνακα A ισχύει $A^2 - 3A + I = 0$, τότε $A^{-1} = 3I - A$.

12. Αν A, B και C είναι τρεις $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, έχει η εξίσωση

$$C^{-1}(A + X)B^{-1} = I$$

λύση X ; Αν ναι, βρείτε το X .

13. Έστω P αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας και $A = PBP^{-1}$. Να λύσετε ως προς B .

14. Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις.

i) $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$

ii) $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$.

15. Να μετατραπούν οι πιο κάτω πίνακες σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -17 & 4 \end{bmatrix}$

16. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι κι αν ναι, βρείτε τον αντίστροφο τους.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

vi) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

17. Να βρεθεί το $c \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος.

Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια Creative Commons Αναφορά δημιουργού-Μη εμπορική-Παρόμοια διανομή 4.0 International License.

