ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Χειμερινό Εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Είναι το $\lambda = 2$ ιδιοτιμή του $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; Γιατί;

2. Είναι το $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$; Αν ναι, βρείτε την ιδιοτιμή.

3. Είναι το $\lambda = 4$ ιδιοτιμή του $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; Αν ναι, βρείτε ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

4. Βρείτε μια βάση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην δεδομένη ιδιοτιμή.

i) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 1,\, 5$

ii) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 10$

iii) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 3$

5. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Αν λ είναι ιδιοτιμή ενός αντιστρέψιμου πίνακα A, δείξτε ότι το $\dfrac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.

7. Δείξτε ότι λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν λ είναι ιδιοτιμή του A^T.

8. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

i) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. Βρείτε τις ιδιοτιμές και αναφέρετε τις πολλαπλότητες τους.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων.

i) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

11. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ με $\pi(\lambda_1) = 1$ και $\lambda_2 = 2$ με $\pi(\lambda_2) = 2$.

ii) Να βρεθούν οι $\gamma(\lambda_1) =\text{dim}E_{\lambda_1}$ και $\gamma(\lambda_2) =\text{dim}E_{\lambda_2}$.

iii) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 και να οριστούν οι ιδιοχώροι E_{λ_1} και E_{λ_2}.

12. Έστω ότι ο πίνακας A γράφεται στην μορφή $A = PDP^{-1}$, όπου $P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, και $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε τον A^4.

13. Διαγωνοποιήστε τους πίνακες, αν είναι δυνατόν.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, ii) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

14. Έστω ότι ο A είναι 5×5 με δύο ιδιοτιμές. Ο ένας ιδιοχώρος έχει διάσταση 3 και ο άλλος 2. Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

15. Έστω ότι ο A είναι 3×3 με δύο ιδιοτιμές. Κάθε ιδιοχώρος έχει διάσταση 1. Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

16. Έστω ότι ο A είναι 4×4 με τρεις ιδιοτιμές. Ο ένας ιδιοχώρος έχει διάσταση 1 και ένας άλλος έχει διάσταση 2. Είναι δυνατόν ο A να μην είναι διαγωνοποιήσιμος;

17. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και μία βάση για κάθε ιδιοχώρο των παρακάτω πινάκων.

i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

18. Ο γραμμικός μετασχηματισμός $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ μπορεί να περιγραφεί ως η σύνθεση περιστροφής διανύσματος κατά μία γωνία ϕ και μεταβολής μήκους r (επιμήκυνση ή συρρίκνωση). Προσδιορίστε την γωνία περιστροφής ϕ και τον συντελεστή κλίμακας r.

i) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$

19. Βρείτε τον αντιστρέψιμο πίνακα P και τον πίνακα C της μορφής $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ έτσι ώστε ο δεδομένος πίνακας A να γράφεται στην μορφή $A = PCP^{-1}$.

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$