

# ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας Εαρινό Εξάμηνο 2021

## Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1. Να μετατραπούν οι πιο κάτω πίνακες σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\text{i) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -17 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Απάντηση: i) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/8 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & -22/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. i) Να μετατρέψετε τον παρακάτω πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Αν ο πίνακας  $A$  είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος είναι το σύστημα συμβιβαστό; Αν ναι, βρείτε την γενική λύση.

$$\text{Απάντηση: i) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ii) Μη συμβιβαστό}$$

3. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η λύση για τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα με μέθοδο απαλοιφής Gauss ή Gauss-Jordan.

$$\begin{array}{lll} x_2 + 4x_3 = -5 & x_1 - 3x_3 = 8 & x - y + 2z - w = -1 \\ \text{i) } x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 & \text{ii) } 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 & 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 & x_2 + 5x_3 = -2 & \text{iii) } -x + 2y - 4z + w = 1 \\ & & 3x - 3w = -3 \end{array}$$

**Απάντηση:** i) Μη συμβιβαστό ii)  $(5, 3, -1)$  iii)  $(t - 1, 2s, s, t)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$

4. Είναι το σύστημα

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_4 = 3 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_4 = -5 \end{array}$$

συμβιβαστό;

**Απάντηση:** Συμβιβαστό

5. Βρείτε μια αλγεβρική σχέση μεταξύ των  $g$ ,  $h$  και  $k$  έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= g \\ 3x_2 - 5x_3 &= h \\ -2x_1 + 5x_2 - 9x_3 &= k\end{aligned}$$

να είναι μη συμβιβαστό.

**Απάντηση:**  $2g + h + k \neq 0$

6. Να βρείτε τις τιμές του  $a$  για τις οποίες το σύστημα δεν έχει λύση, έχει ακριβώς μία λύση ή έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2\end{aligned}$$

**Απάντηση:** Άπειρες λύσεις για  $a = 4$ , καμία λύση για  $a = -4$ , μία λύση για  $a \neq \pm 4$

7. Να βρεθεί η λύση (αν υπάρχει) για το σύστημα που έχει επαυξημένο πίνακα τον ακόλουθο.

$$A = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

**Απάντηση:**  $(3t - s, 4t + 1, s, 4 - 9t, t)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$

8. Προσδιορίστε αν τα παρακάτω συστήματα έχουν μη τετριμμένες λύσεις.

$$\begin{aligned}2x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ \text{i) } -2x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0\end{aligned} \quad \begin{aligned} & \\ \text{ii) } -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

**Απάντηση:** i) Άπειρες λύσεις ii) Άπειρες λύσεις

9. Βρείτε το σύνολο λύσεων των παρακάτω συστημάτων.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ \text{i) } -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 0\end{aligned} \quad \begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ \text{ii) } -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -3\end{aligned}$$

**Απάντηση:** i)  $(5t, -2t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ii)  $(-2 + 5t, 1 - 2t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

10. Δίνονται οι διαστάσεις των παρακάτω πέντε πινάκων:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4 \times 5) & (4 \times 5) & (5 \times 2) & (4 \times 2) & (5 \times 4) \end{array}$$

Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πράξεις ορίζονται. Αν ναι, γράψτε τις διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει.

- i)  $BA$                       ii)  $AC + D$                       iii)  $AE + B$                       iv)  $AB + B$   
 v)  $E(A + B)$                       vi)  $E(AC)$                       vii)  $EA$                       viii)  $(A + E)D$

**Απάντηση:** i) Δεν ορίζεται ii)  $4 \times 2$  iii) Δεν ορίζεται iv) Δεν ορίζεται v)  $5 \times 5$  vi)  $5 \times 2$  vii)  $5 \times 5$  viii) Δεν ορίζεται

**11.** Δίνονται οι παρακάτω πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους παρακάτω πίνακες (στις περιπτώσεις που ορίζονται).

- i)  $D + E$                       ii)  $D - E$                       iii)  $5A$                       iv)  $-7C$   
 v)  $2B - C$                       vi)  $4E - 2D$                       vii)  $-3(D + 2E)$                       viii)  $A - A$   
 ix)  $AB$                       x)  $BA$                       xi)  $(3E)D$                       xii)  $(AB)C$

**Απάντηση:**

- i)  $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$                       ii)  $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$                       iii)  $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$                       iv)  $\begin{bmatrix} -7 & -28 & 14 \\ -21 & -7 & -35 \end{bmatrix}$                       v) Δεν ορίζεται  
 vi)  $\begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$                       vii)  $\begin{bmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{bmatrix}$                       viii) Δεν ορίζεται                      ix)  $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$                       x) Δεν ορίζεται

**12.** Να βρεθούν οι αριθμοί  $a, b, c, d$  ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα.

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d - 2c \\ d + 2c & -2 \end{bmatrix}$$

**Απάντηση:**  $a = 4, b = -6, c = -1, d = 1$

**13.** Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να προσδιορίσετε τον  $4 \times 4$  πίνακα  $(a_{ij})$  που ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη.

- i)  $a_{ij} = 0$  μόνο όταν  $i \neq j$   
 ii)  $a_{ij} = 0$  μόνο όταν  $i > j$   
 iii)  $a_{ij} = 0$  μόνο όταν  $i < j$   
 iv)  $a_{ij} = 0$  μόνο όταν  $|i - j| > 1$

**Απάντηση:** i)  $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$                       ii)  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$                       iii)  $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$                       iv)  $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$

**14.** Ελέγξτε κατά πόσον οι παρακάτω πίνακες είναι συμμετρικοί.

$$\text{i)} \begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

**Απάντηση:** i) Όχι ii) Όχι iii) Ναι

**15.** Να βρεθεί το  $a \in \mathbb{R}$  ώστε ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$  να είναι συμμετρικός.

**Απάντηση:**  $a = -8$

**16.** Αν ο  $A$  είναι τετραγωνικός πίνακας, να δείξετε τα παρακάτω.

i) Οι πίνακες  $AA^T$  και  $A + A^T$  είναι συμμετρικοί.

ii) Ο πίνακας  $A - A^T$  είναι αντισυμμετρικός.

**17.** Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων.

$$\text{i)} A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)} B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

**Απάντηση:** i)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$  ii)  $\begin{bmatrix} 1/5 & 3/10 \\ -1/5 & 1/10 \end{bmatrix}$  iii)  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

**18.** Να δείξετε ότι αν για τον αντιστρέψιμο τετραγωνικό πίνακα  $A$  ισχύει  $A^2 - 3A + I = 0$ , τότε  $A^{-1} = 3I - A$ .

**19.** Αν  $A, B$  και  $C$  είναι τρεις  $n \times n$  αντιστρέψιμοι πίνακες, έχει η εξίσωση

$$C^{-1}(A + X)B^{-1} = I$$

λύση  $X$ ; Αν ναι, βρείτε το  $X$ .

**20.** Έστω  $P$  αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας και  $A = PBP^{-1}$ . Να λύσετε ως προς  $B$ .

**Απάντηση:**  $B = P^{-1}AP$

**21.** Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις.

i)  $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$

ii)  $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$ .

**Απάντηση:** i)  $B^{-1}$  ii)  $CD^{-1}$

**22.** Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι κι αν ναι, βρείτε τον αντίστροφο τους.

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{v)} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{vi)} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

**Απάντηση:** i)  $\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$  ii)  $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$  iii)  $\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -3/35 & -1/7 & 0 \\ 41/35 & -5/7 & -1 \end{bmatrix}$  iv) Μη αντιστρέψιμος

v) Μη αντιστρέψιμος vi)  $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & -3 & 0 \\ -1/8 & 1/4 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/40 & -1/20 & -1/10 & -1/5 \end{bmatrix}$

**23.** Να βρεθεί το  $c \in \mathbb{R}$  ώστε ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$  να είναι αντιστρέψιμος.

**Απάντηση:**  $c \in \mathbb{R} - 0, 1$

**24.** Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο του αντιστρόφου πίνακα.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$$

$$\text{i)} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1$$

$$\text{ii)} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + x_3 = 5$$

**Απάντηση:** i)  $(-1, 4, -7)$  ii)  $(1, -11, 16)$