

ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Εαρινό εξάμηνο 2021

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Υπολογίστε τις ορίζουσες χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα ως προς μία γραμμή ή στήλη.

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Απάντηση: i) 1 ii) -5 iii) 10 iv) 6

2. Υπολογίστε τις ορίζουσες χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Απάντηση: i) 0 ii) 0 iii) 3

3. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, προσδιορίστε αν οι πιο κάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι.

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Απάντηση: i) Αντιστρέψιμος ii) Μη αντιστρέψιμος iii) Αντιστρέψιμος

4. Αν A είναι τετραγωνικός πίνακας και ισχύει $\det A^4 = 0$, να δείξετε ότι ο A είναι μη αντιστρέψιμος.

5. Χρησιμοποιώντας ορίζουσες, προσδιορίστε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

Απάντηση: Είναι γραμμικά ανεξάρτητα

6. Αν A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες, να δείξετε ότι $\det(AB) = \det(BA)$.

7. Αν δίνεται ότι

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες.

$$\text{i)} \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\text{v)} \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\text{vi)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$$

Απάντηση: i) -6 ii) 6 iii) 0 iv) 6 v) -6 vi) -12

8. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Cramer, αν εφαρμόζεται, βρείτε τη λύση του συστήματος.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -3x_1 + x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Απάντηση: $(3/2, 4, -7/2)$

9. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές $(-1, 0)$, $(0, 5)$, $(1, -4)$, $(2, 1)$.

Απάντηση: 14

10. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με μία κορυφή στο $(0, 0, 0)$ και προσκείμενες κορυφές $(1, 0, -2)$, $(1, 2, 4)$ και $(7, 1, 0)$.

Απάντηση: 22

11. Έστω S το παραλληλόγραμμο ορισμένο από τα διανύσματα $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ και T ο γραμμικός μετασχηματισμός με κανονικό πίνακα $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε το εμβαδόν της εικόνας του S .

Απάντηση: 24