Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας -Χειμ. Εξ. 2020-21

Ασκήσεις του Κεφ. 3 - Μέρος Β- Απαντήσεις

1. Αν οι στήλες ενός 7×7 πίνακα D είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τί μπορείτε να πείτε για τις λύσεις του $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
   Απ. Από IMT, D είναι αντιστρέψιμος και άρα το σύστημα έχει λύση για κάθε $\mathbf{b}$.

2. Προσδιορίστε αν τα πιο κάτω σύνολα είναι βάσεις του $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$.

   (α′) $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$, Ναι. Γιατί;

   (β′) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$, Ναι. Γιατί;

   (γ′) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \right\}$, Όχι. Γιατί;

3. Έστω ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

   - Το Nul$A$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^4$;
   - Το Col$A$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^4$;
   - Βρείτε μία βάση του πυρήνα Nul$A$ και τη διάσταση του πυρήνα.
   - Βρείτε μία βάση του Col$A$ και το βαθμό του A.

   Απ.

   - Το Nul$A$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.
   - Το Col$A$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
   - Βάση του Nul$A$: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \right\}$ και η διάσταση του είναι 2.
   - Βάση του Col$A$: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ και rankA=2.

4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

- Βρείτε μία βάση του πυρήνα Nul$A$ και το nullity του A.
- Βρείτε μία βάση του υπόχωρου Col$A$ του $\mathbb{R}^4$ και τη διάσταση του.

Απ.

- Βάση του Nul$A$: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 0.5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ και το nullity$(A) = 2$.
- Βάση του Col$A$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ και η διάσταση του είναι 3.

5. Έστω ο πίνακας

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ -4 & 12 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Βρείτε το rankE.
- Βρείτε τη μηδενικότητα του E.

Απ.

- rankE$= 3$
- nullity$(E) = 1$.

6. Έστω ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Βρείτε το ColC.
- Βρείτε το NulC.

Απ. ColC$= \mathbb{R}^4$, rankC$= 4$ και NulC$= \{\mathbf{0}\}$, nullity(C)$= 0$.

7. Έστω F ένας 5×5 πίνακας του οποίου ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του δεν είναι το $\mathbb{R}^5$. Τι μπορείτε να πείτε για το πυρήνα του;
Απ. $\text{Nul}A \neq \{\mathbf{0}\}$. Γιατί;

8. Βρείτε μία βάση του υπόχωρου που παράγεται από τα διανύσματα:
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$
Ποιά η διάσταση του υπόχωρου;
Απ. Μία βάση αποτελείται από το 1ο, 3ο, και 4ο διάνυσμα. Η διάσταση είναι 3.

9. Έστω η βάση $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}\}$ του υπόχωρου H και $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} \in H$. Βρείτε το διάνυσμα $\mathcal{B}$-συντεταγμένων του $\mathbf{y}$.
Απ. $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

10. Έστω η βάση $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ του υπόχωρου K και $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix} \in K$. Βρείτε το διάνυσμα $[\mathbf{z}]_{\mathcal{E}}$.
Απ. $[\mathbf{z}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}$

11. Θεωρούμε την απεικόνιση $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, όπου
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$
Βρείτε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ του οποίου η εικόνα είναι το $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ και προσδιορίστε αν το $\mathbf{x}$ είναι μοναδικό.
Απάντηση. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ μοναδικό.

12. Βρείτε όλα τα $\mathbf{x}$ που απεικονίζονται στο μηδενικό διάνυσμα μέσω του μετασχηματισμού $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Απάντηση.

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έστω $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Είναι το $\mathbf{y}$ στο πεδίο τιμών του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$;

Απάντηση. Ναι.

13. Έστω $\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ και $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το $\mathbf{e_1}$ στο $\mathbf{y_1}$ και το $\mathbf{e_2}$ στο $\mathbf{y_2}$. Βρείτε τις εικόνες των $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Απάντηση.

$$T(\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$$

14. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί:

    (α′) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 4, 5x_2)$ **Απάντηση.** Όχι. Γιατί;

    (β′) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3)$ **Απάντηση**. Ναι. Γιατί;

15. Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα A που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό

    (α′) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{e_1}) = (3, 1, 3, 1)$ και $T(\mathbf{e_2}) = (-5, 2, 0, 0)$, όπου $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ και $\mathbf{e_2} = (0, 1)$.
    Απ.

    $$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

    (β′) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ απεικονίζει το $\mathbf{e_1}$ στο $\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2}$ και αφήνει το $\mathbf{e_2}$ αναλλοίωτο.
    Απ.

    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Έστω $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$

    (α′) Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα A που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό T. **Απ.**

    $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(β′) Προσδιορίστε αν ο T είναι (ι) $1-1$, (ιι) επί.
Απ. Δεν είναι ούτε $1-1$ ούτε επί.

17. Έστω $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$

(α′) Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα A που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό T. **Απ.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

(β′) Προσδιορίστε αν ο T είναι (ι) $1-1$, (ιι) επί.
Απ. Δεν είναι $1-1$, αλλά είναι επί.