ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Εαρινό εξάμηνο 2021

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Είναι το $\lambda = 2$ ιδιοτιμή του $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; Γιατί;

Απάντηση: Ναι

2. Είναι το $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$; Αν ναι, βρείτε την ιδιοτιμή.

Απάντηση: Όχι

3. Είναι το $\lambda = 4$ ιδιοτιμή του $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; Αν ναι, βρείτε ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Απάντηση: Ναι, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. Βρείτε μια βάση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην δεδομένη ιδιοτιμή.

i) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 1,\ 5$

ii) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 10$

iii) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 3$

Απάντηση: i) $\lambda = 1$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 5$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απάντηση: $\lambda = 1$ με βάση ιδιοχώρου $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$ με βάση ιδιοχώρου $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 3$ με βάση ιδιοχώρου $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. Αν λ είναι ιδιοτιμή ενός αντιστρέψιμου πίνακα A, δείξτε ότι το $\dfrac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.

7. Δείξτε ότι λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν λ είναι ιδιοτιμή του A^T.

8. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

i) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $\lambda^2 - 4\lambda - 45$ ii) $\lambda^2 - 2\lambda - 1$ iii) $= \lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda - 6$ iv) $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24$

9. Βρείτε τις ιδιοτιμές και αναφέρετε τις πολλαπλότητες τους.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Απάντηση: $\lambda = 0$ με πολλαπλότητα 1, $\lambda = 1$ με πολλαπλότητα 2, $\lambda = 3$ με πολλαπλότητα 2

10. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων.

i) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $\lambda = 1$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 3$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ii) $\lambda = 1$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 4$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 6$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

11. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ με $\pi(\lambda_1) = 1$ και $\lambda_2 = 2$ με $\pi(\lambda_2) = 2$.

ii) Να βρεθούν οι $\gamma(\lambda_1) =$dimE_{λ_1} και $\gamma(\lambda_2) =$dimE_{λ_2}.

iii) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 και να οριστούν οι ιδιοχώροι E_{λ_1} και E_{λ_2}.

Απάντηση: ii) $\gamma(1) = 1$, $\gamma(2) = 2$ iii) $E_{\lambda_1} = \text{Span}\{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, $E_{\lambda_2} = \text{Span}\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

12. Έστω ότι ο πίνακας A γράφεται στην μορφή $A = PDP^{-1}$, όπου $P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, και $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε τον A^4.

Απάντηση: $\begin{bmatrix} 226 & -525 \\ 90 & -209 \end{bmatrix}$

13. Διαγωνοποιήστε τους πίνακες, αν είναι δυνατόν.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, ii) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

iv) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ii) Δεν διαγωνοποιείται iii) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ iv) $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ v) $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

14. Έστω ότι ο A είναι 5×5 με δύο ιδιοτιμές. Ο ένας ιδιοχώρος έχει διάσταση 3 και ο άλλος 2. Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Απάντηση: Ναι

15. Έστω ότι ο A είναι 3×3 με δύο ιδιοτιμές. Κάθε ιδιοχώρος έχει διάσταση 1. Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Απάντηση: Όχι

16. Έστω ότι ο A είναι 4×4 με τρεις ιδιοτιμές. Ο ένας ιδιοχώρος έχει διάσταση 1 και ένας άλλος έχει διάσταση 2. Είναι δυνατόν ο A να μην είναι διαγωνοποιήσιμος;

Απάντηση: Όχι

17. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και μία βάση για κάθε ιδιοχώρο των παρακάτω πινάκων.

i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $\lambda = 2 + i$, $\begin{bmatrix} -1 + i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2 - i$, $\begin{bmatrix} -1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$ ii) $\lambda = 2 + 3i$, $\begin{bmatrix} 1 - 3i \\ 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2 - 3i$, $\begin{bmatrix} = 1 + 3i \\ 2 \end{bmatrix}$

18. Ο γραμμικός μετασχηματισμός $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ μπορεί να περιγραφεί ως η σύνθεση περιστροφής διανύσματος κατά μία γωνία ϕ και μεταβολής μήκους r (επιμήκυνση ή συρρίκνωση). Προσδιορίστε την γωνία περιστροφής ϕ και τον συντελεστή κλίμακας r.

i) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $\phi = \pi/6, r = 2$ ii) $\phi = -5\pi/6, r = 1$ iii) $\phi = -\pi/4, r = \sqrt{2}/10$

19. Βρείτε τον αντιστρέψιμο πίνακα P και τον πίνακα C της μορφής $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ έτσι ώστε ο δεδομένος πίνακας A να γράφεται στην μορφή $A = PCP^{-1}$.

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Απάντηση: i) $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$