Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας -Χειμ. Εξ. 2020-21

Ασκήσεις του Κεφ. 5 - Απαντήσεις

1. **Απ.** Ναι.
2. **Απ.** Οχι.
3. **Απ.** Ναι, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
4.
   - $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1, 5$

     Απ. $\lambda = 1$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\qquad \lambda = 5$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 10$

     Απ. $\lambda = 10$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 3$

     Απ. $\lambda = 3$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
5. **Απ.**

   $\lambda_1 = 1$, Βάση του ιδιόχωρου: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   $\lambda_2 = 2$, Βάση του ιδιόχωρου: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

   $\lambda_3 = 3$, Βάση του ιδιόχωρου: $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. (α΄) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

   Απ. $\lambda^2 - 4\lambda - 45$

(β′) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Απ. $\lambda^2 - 2\lambda - 1$

(γ′) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$
Απ. $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 9\lambda - 6$

(δ′) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
Απ. $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24$

9. **Απ.** $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = \lambda_5 = 3$

10. (α′) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$,

Απ. $\lambda_1 = 1,\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = 3,\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(β′) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Απ. $\lambda_1 = 1,\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 4,\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = 6,\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

11. **Απ.**

$$\lambda_1 = 1,\ \pi(\lambda_1) = 1,\ \gamma(\lambda_1) = 1,\ E_{\lambda_1} = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\},$$

$$\lambda_2 = 2,\ \pi(\lambda_2) = 2,\ \gamma(\lambda_2) = 2,\ E_{\lambda_2} = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

12. **Απ.** $A^4 = \begin{bmatrix} 226 & -525 \\ 90 & -209 \end{bmatrix}$

13. (α′) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, **Απ.** • $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, και $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(β′) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **Απ.** Δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

(γ′) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **Απ.** • $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, και $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(δ′) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **Απ.** • $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, και $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ε′) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **Απ.** • $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, και $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

14. **Απ.** Ναι. Γιατί;

15. **Απ.** Όχι. Γιατί;

16. **Απ.** Όχι. Γιατί;

17. (α′) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

    Απ. $\lambda = 2 + i$, $\begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2 - i$, $\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$,

    (β′) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

    Απ. $\lambda = 2 + 3i$, $\begin{bmatrix} 1-3i \\ 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2 - 3i$, $\begin{bmatrix} 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}$

18. **Απ.**

    (α′) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\lambda = \sqrt{3} \pm i$, $\phi = \pi/6$, $r = 2$

    (β′) $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$, $\lambda = -\sqrt{3}/2 \pm (1/2)i$, $\phi = -5\pi/6$, $r = 1$

    (γ′) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 0.1 \pm 0.1i$, $\phi = -\pi/4$, $r = \sqrt{2}/10$

19. **Απ.**

    (α′) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

    (β′) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$