

**ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας**  
**Εαρινό εξάμηνο 2021**

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Έστω τα διανύσματα  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Να υπολογιστούν τα παρακάτω.
- i)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$                       ii)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$                       iii)  $\frac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w}$                       iv)  $\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{x}$

**Απάντηση:** i) 5 ii) 8 iii)  $(3/35, -1/35, 5/35)$  iv)  $\frac{5}{7}(6, -2, 3)$

2. Έστω διανύσματα  $\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  έτσι ώστε το  $\mathbf{y}$  είναι κάθετο στα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$ .

i) Ναδειχθεί ότι το  $\mathbf{y}$  είναι κάθετο στο  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ .

ii) Ναδειχθεί ότι το  $\mathbf{y}$  είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα  $\mathbf{w} \in \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ .

3. Ναδειχθεί ότι το σύνολο των  $\mathbf{u}_i$  αποτελεί ορθογώνια βάση του  $\mathbb{R}^2$  ή του  $\mathbb{R}^3$  και στη συνέχεια να εκφράσετε το  $\mathbf{x}$  ως γραμμικό συνδυασμό τους.

i)  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$

ii)  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ .

**Απάντηση:** i)  $\mathbf{x} = 3\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2$  ii)  $\mathbf{x} = \frac{5}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$

4. Έστω  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ . Να εκφράσετε το  $\mathbf{y}$  ως άθροισμα δύο κάθετων διανυσμάτων που το πρώτο να είναι στο  $\text{Span}\{\mathbf{u}\}$  και το δεύτερο κάθετο στο  $\mathbf{u}$ .

**Απάντηση:**  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = (-4/5, 7/5) + (14/5, 8/5)$

5. Έστω  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  και  $L = \text{Span}\{\mathbf{u}\}$ . Να δείξετε ότι η απεικόνιση  $T(\mathbf{x}) = \text{proj}_L \mathbf{x}$  είναι γραμμική.

6. Έστω  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Αφού δείξετε ότι το  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  είναι ορθογώνιο σύνολο, βρείτε την ορθογώνια προβολή του  $\mathbf{y}$  πάνω στο  $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ .

**Απάντηση:**  $\hat{\mathbf{y}} = (-1, 4, 0)$

7. Έστω  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ . Αν  $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  να γράψετε το  $\mathbf{y}$  σαν άθροισμα ενός διανύσματος στο  $W$  και ενός διανύσματος κάθετου στο  $W$ .

**Απάντηση:**  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} = (10/3, 2/3, 8/3) + (-7/3, 7/3, 7/3)$

8. Τα παρακάτω σύνολα είναι βάσεις υποχώρου  $W$ . Να τα μετατρέψετε σε ορθογώνιες βάσεις χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt. Στην συνέχεια, να τις μετατρέψετε σε ορθοκανονικές βάσεις.

$$\text{i) } \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Απάντηση: i) } \left\{ \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -5, 1), \frac{2}{3\sqrt{6}}(3, 3/2, 3/2) \right\} \text{ ii) } \left\{ \frac{1}{\sqrt{18}}(1, -4, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{43}}(5, 1, -4, -1) \right\}$$

9. Να βρεθεί ορθογώνια βάση για τον χώρο στηλών του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Απάντηση: } \{(3, 1, -1, 3), (1, 3, 3, -1), (-3, 1, 1, 3)\}$$