ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Χειμερινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1. Δίνονται οι διαστάσεις των παρακάτω πέντε πινάκων:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4\times 5) & (4\times 5) & (5\times 2) & (4\times 2) & (5\times 4) \end{array}$$

Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πράξεις ορίζονται. Αν ναι, γράψτε τις διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει.

i) BA ii) $AC+D$ iii) $AE+B$ iv) $AB+B$

v) $E(A+B)$ vi) $E(AC)$ vii) EA viii) $(A+E)D$

2. Δίνονται οι παρακάτω πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}6&1&3\\-1&1&2\\4&1&3\end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους παρακάτω πίνακες (στις περιπτώσεις που ορίζονται).

i) $D+E$ ii) $D-E$ iii) $5A$ iv) $-7C$

v) $2B-C$ vi) $4E-2D$ vii) $-3(D+2E)$ viii) $A-A$

ix) AB x) BA xi) $(3E)D$ xii) $(AB)C$

3. Να βρεθούν οι αριθμοί a, b, c, d ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα.

$$\begin{bmatrix}a&3\\-1&a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&d-2c\\d+2c&-2\end{bmatrix}$$

4. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να προσδιορίσετε τον 4×4 πίνακα (a_{ij}) που ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη.

i) $a_{ij}=0$ μόνο όταν $i\neq j$

ii) $a_{ij}=0$ μόνο όταν $i>j$

iii) $a_{ij}=0$ μόνο όταν $i<j$

iv) $a_{ij}=0$ μόνο όταν $|i-j|<1$

5. Ελέγξτε κατά πόσον οι παρακάτω πίνακες είναι συμμετρικοί.

i) $\begin{bmatrix}-8&-8\\0&0\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix}2&-1&3\\-1&5&1\\3&1&7\end{bmatrix}$

6. Να βρεθεί το $a\in\mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}4&-3\\a+5&-1\end{bmatrix}$ να είναι συμμετρικός.

7. Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, να δείξετε τα παρακάτω.

i) Οι πίνακες AA^T και $A + A^T$ είναι συμμετρικοί.

ii) Ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.

8. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων.

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ iii) $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

9. Να δείξετε ότι αν για τον αντιστρέψιμο τετραγωνικό πίνακα A ισχύει $A^2 - 3A + I = 0$, τότε $A^{-1} = 3I - A$.

10. Αν A, B και C είναι τρεις $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, έχει η εξίσωση

$$C^{-1}(A + X)B^{-1} = I$$

λύση X; Αν ναι, βρείτε το X.

11. Έστω P αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας και $A = PBP^{-1}$. Να λύσετε ως προς B.

12. Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις.

i) $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$

ii) $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$.

13. Να μετατραπούν οι πιο κάτω πίνακες σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -17 & 4 \end{bmatrix}$

14. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι κι αν ναι, βρείτε τον αντίστροφο τους.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

15. Να βρεθεί το $c \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος.