

**ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας**  
**Εαρινό εξάμηνο 2021**

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Υπολογίστε τις ορίζουσες χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα ως προς μία γραμμή ή στήλη.

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Υπολογίστε τις ορίζουσες χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, προσδιορίστε αν οι πιο κάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι.

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Αν  $A$  είναι τετραγωνικός πίνακας και ισχύει  $\det A^4 = 0$ , να δείξετε ότι ο  $A$  είναι μη αντιστρέψιμος.

5. Χρησιμοποιώντας ορίζουσες, προσδιορίστε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

6. Αν  $A$  και  $B$  είναι τετραγωνικοί πίνακες, να δείξετε ότι  $\det(AB) = \det(BA)$ .

7. Αν δίνεται ότι

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες.

$$\text{i)} \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\text{ii)} \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$$

$$\text{iv)} \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\text{v)} \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\text{vi)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$$

8. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Cramer, αν εφαρμόζεται, βρείτε τη λύση του συστήματος.

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 7 \\ -3x_1 + x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= -3\end{aligned}$$

9. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές  $(-1, 0)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(1, -4)$ ,  $(2, 1)$ .

10. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπίπεδου με μία κορυφή στο  $(0, 0, 0)$  και προσκείμενες κορυφές  $(1, 0, -2)$ ,  $(1, 2, 4)$  και  $(7, 1, 0)$ .

11. Έστω  $S$  το παραλληλόγραμμο ορισμένο από τα διανύσματα  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$  και  $T$  ο γραμμικός μετασχηματισμός με κανονικό πίνακα  $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ . Βρείτε το εμβαδόν της εικόνας του  $S$ .