

**ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας**  
**Χειμερινό εξάμηνο 2020**

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου - Α μέρος

1. Έστω τα διανύσματα  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$ . Προσδιορίστε αν το διάνυσμα  $\mathbf{b}$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  και  $\mathbf{a}_3$  κι αν ναι να βρείτε τον γραμμικό συνδυασμό.

2. Έστω  $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ . Για ποια ή ποιες τιμές του  $h$  είναι το  $\mathbf{b}$  στο  $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ ;

3. Αν  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$  και  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , εξετάσετε αν παράγεται το  $\mathbf{u}$  από τις στήλες του  $A$ .

4. Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ , δείξτε ότι η εξίσωση  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  δεν έχει λύση για όλα τα διανύσματα  $\mathbf{b}$  και περιγράψτε τα  $\mathbf{b}$  για τα οποία έχει λύση.

5. Δίνεται ότι

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τους αριθμούς  $c_1$ ,  $c_2$  και  $c_3$  για τους οποίους ισχύει

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

6. Έστω  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^4$ . Μπορεί να ισχύει  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^4$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

7. Βρείτε το  $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ .

8. Προσδιορίστε σε καθεμία από τις περιπτώσεις αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

3.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$4. \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Προσδιορίστε αν οι στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

10. Για ποια ή ποιες τιμές του  $h$  είναι τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ h \end{bmatrix}$$

γραμμικώς εξαρτημένα;

11. Έστω τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}.$$

Για ποια ή ποιες τιμές του  $h$ :

- (i) είναι το  $\mathbf{v}_3$  στο  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ?
- (ii) είναι το σύνολο  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  γραμμικώς εξαρτημένο;