ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Εαρινό εξάμηνο 2021

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστούν τα παρακάτω.

i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ ii) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ iii) $\dfrac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}$ iv) $\dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\mathbf{x}$

2. Έστω διανύσματα $\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε το $\mathbf{y}$ είναι κάθετο στα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

i) Να δειχθεί ότι το $\mathbf{y}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

ii) Να δειχθεί ότι το $\mathbf{y}$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα $\mathbf{w} \in \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

3. Να δειχθεί ότι το σύνολο των $\mathbf{u}_i$ αποτελεί ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$ και στη συνέχεια να εκφράσετε το $\mathbf{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό τους.

i) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$

ii) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

4. Έστω $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$. Να εκφράσετε το $\mathbf{y}$ ως άθροισμα δύο κάθετων διανυσμάτων που το πρώτο να είναι στο $\text{Span}\{\mathbf{u}\}$ και το δεύτερο κάθετο στο $\mathbf{u}$.

5. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbb{O}$ και $L = \text{Span}\{\mathbf{u}\}$. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $T(\mathbf{x}) = \text{proj}_L \mathbf{x}$ είναι γραμμική.

6. Έστω $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Αφού δείξετε ότι το $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ είναι ορθογώνιο σύνολο, βρείτε την ορθογώνια προβολή του $\mathbf{y}$ πάνω στο $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

7. Έστω $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Αν $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ να γράψετε το $\mathbf{y}$ σαν άθροισμα ενός διανύσματα στο W και ενός διανύσματος κάθετου στο W.

8. Τα παρακάτω σύνολα είναι βάσεις υποχώρου W. Να τα μετατρέψετε σε ορθογώνιες βάσεις χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gram-Schmidt. Στην συνέχεια, να τις μετατρέψετε σε ορθοκανονικές βάσεις.

i) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. Να βρεθεί ορθογώνια βάση για τον χώρο στηλών του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}.$$