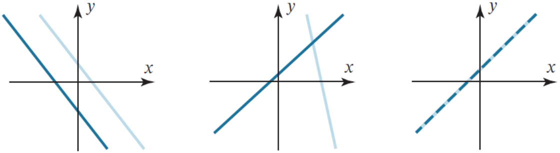
Κεφάλαιο 1 - Γραμμικά συστήματα και Πίνακες

1.1 Γραμμικά συστήματα

Υπενθύμιση:

Ένα σύστημα της μορφής $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ παριστάνει ένα ζεύγος ευθειών στο επίπεδο.

Λύση του συστήματος $\leftrightarrow$ σημείο τομής των ευθειών



Θα γενικεύσουμε προς δύο κατευθύνσεις:

- θεωρώντας περισσότερες μεταβλητές
- βρίσκοντας γενικές μεθόδους επίλυσης

Ορισμός

Μια εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

όπου $a_1, a_2 \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ άγνωστοι, λέγεται **γραμμική εξίσωση**.

Παράδειγμα

Οι εξισώσεις

- $x + 3y = 7$
- $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$
- $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$

είναι γραμμικές.

Παράδειγμα

Οι εξισώσεις

- $x + 3y^2 = 4$
- $\sin x + y = 0$
- $\sqrt{x} + y = 0$

είναι μη γραμμικές.

Ορισμός

Ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών εξισώσεων λέγεται **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** ή απλά **γραμμικό σύστημα**.

Γενική μορφή γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ορισμός

Λύση ενός γραμμικού συστήματος ονομάζεται μια ακολουθία αριθμών $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ώστε η αντικατάσταση

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

να ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του συστήματος.
Ένα σύστημα λέγεται **συμβιβαστό** αν έχει τουλάχιστον μία λύση.

Παράδειγμα

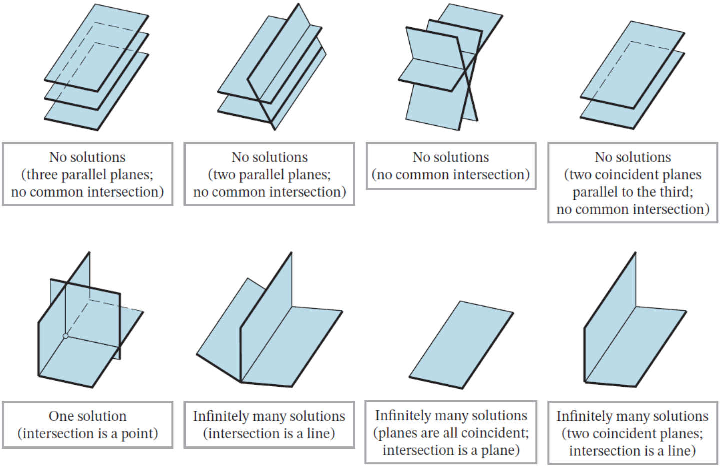
Το σύστημα

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

έχει λύση $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Γεωμετρική διαίσθηση:

$$\text{Σύστημα } 2 \times 2 \leftrightarrow \text{δύο ευθείες στο επίπεδο}$$
$$\text{Σύστημα } 3 \times 3 \leftrightarrow \text{τρία επίπεδα στο χώρο}$$



Εφόσον μόνο οι συντελεστές των αγνώστων σχετίζονται με τις λύσεις του συστήματος, τους συγκεντρώνουμε σε έναν πίνακα.

Ορισμός

Έστω ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ο **επαυξημένος πίνακας** του γραμμικού συστήματος είναι ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Οι αλγεβρικές πράξεις που επιτρέπονται σε ένα γραμμικό σύστημα, μεταφράζονται σε πράξεις μεταξύ γραμμών του επαυξημένου πίνακα - **γραμμοπράξεις**.

Εναλλαγή δύο εξισώσεων	$\leftrightarrow$	Εναλλαγή δύο γραμμών
Πολλαπλασιαμός μίας εξίσωσης με σταθερά $\neq 0$	$\leftrightarrow$	Πολλαπλασιασμός μίας γραμμής με σταθερά $\neq 0$
Πρόσθεση ενός πολλαπλασίου μίας εξίσωσης σε μία άλλη	$\leftrightarrow$	Πρόσθεση πολλαπλασίου μίας γραμμής σε μία άλλη

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε γραμμικό σύστημα ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

- Υπάρχει μοναδική λύση.
- Υπάρχουν άπειρες λύσεις.
- Δεν υπάρχει λύση.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 16x - 8y &= 4 \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

Ορισμός

Ένας πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός** αν:

1. Κάθε μη μηδενική γραμμή έχει πρώτο μη μηδενικό στοιχείο 1, το οποίο καλούμε ηγετικό 1.
2. Αν υπάρχουν μηδενικές γραμμές βρίσκονται στο κάτω μέρος του πίνακα.
3. Αν υπάρχουν δύο διαδοχικές μη μηδενικές γραμμές τότε το ηγετικό 1 της δεύτερης βρίσκεται πιο δεξιά από το ηγετικό 1 της πρώτης.
4. Κάθε στήλη που περιέχει ηγετικό 1 έχει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ίσα με 0.

Αν ο πίνακας ικανοποιεί τις συνθήκες (1), (2) & (3) λέγεται **κλιμακωτός**.

Παράδειγμα

Οι παρακάτω πίνακες είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι παρακάτω πίνακες είναι κλιμακωτοί αλλά όχι ανηγμένοι.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Οι παρακάτω πίνακες είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&*\\0&1&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&*&0&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&1&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&1&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

Οι παρακάτω πίνακες είναι κλιμακωτοί αλλά όχι ανηγμένοι.

$$\begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&*&*&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&1&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&1&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

Θεώρημα

- *Μετά από γραμμοπράξεις, κάθε πίνακας μετατρέπεται σε έναν μοναδικό ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.*
- *Μετά από γραμμορπαξεις, κάθε πίνακας είναι μετατρέπεται σε κλιμακωτό πίνακα (όχι απαραίτητα μοναδικό).*

Παράδειγμα

Να μετατραπεί σε ανηγμένο κλιμακωτό ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Μέθοδος απαλοιφής

Η λύση μέσω απαλοιφής γίνεται μετατρέποντας τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε

- κλιμακωτό (απαλοιφή Gauss) ή
- ανηγμένο κλιμακωτό (απαλοιφή Gauss-Jordan)

και κάνοντας πίσω αντικατάσταση, δηλαδή σχηματίζουμε τις εξισώσεις με βάση τον πίνακα και βρίσκουμε τις λύσεις (αν υπάρχουν).

Παράδειγμα

Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\
2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\
 & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\
2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6
\end{array}
$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 5\\
2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 10\\
x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Όταν έχουμε την κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα γραμμικού συστήματος, οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε ηγετικό 1 λέγονται **ηγετικές μεταβλητές** ενώ οι υπόλοιπες λέγονται **ελεύθερες μεταβλητές**.

Παράδειγμα

Βρείτε ποιες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές (αν υπάρχουν) στα προηγούμενα συστήματα.

Θεώρημα

Έστω ότι ο A είναι επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος σε κλιμακωτή μορφή.

1. *Αν υπάρχει γραμμή του A της μορφής $[0\ 0\ \ldots\ 0|b]$ με $b \neq 0$ τότε το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό και αντιστρόφως.*
2. *Αν δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση και δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές (δηλαδή τα ηγετικά 1 είναι όσα και οι μεταβλητές) τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.*
3. *Αν δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση και υπάρχει ελεύθερη μεταβλητή (δηλαδή τα ηγετικά 1 είναι λιγότερα από ότι οι μεταβλητές) τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που εκφράζονται παραμετρικά.*

Παράδειγμα

Οι παρακάτω πίνακες προέκυψαν εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις σε επαυξημένους πίνακες γραμμικών συστημάτων. Τι συμπεραίνετε για τις λύσεις τους·

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (c) \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ομογενή συστήματα

Ορισμός

Ένα γραμμικό σύστημα λέγεται **ομογενές** αν είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = 0 \end{array}$$

- Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα είναι πάντα συμβιβαστό, διότι η λύση $(0, 0, \ldots, 0)$ επαληθεύει όλες τις εξισώσεις.
- Η λύση $(0, 0, \ldots, 0)$ λέγεται **τετριμμένη λύση**.

Ομογενή συστήματα

Εφόσον κάθε ομογενές σύστημα είναι συμβιβαστό ισχύει το παρακάτω.

Θεώρημα

Αν ένα ομογενές σύστημα έχει παραπάνω αγνώστους από ότι εξισώσεις τότε έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\
-x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 0 \\
2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$