

## 1.2 Πίνακες και Πράξεις Πινάκων

### Παράδειγμα

Ένας **πίνακας** είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών, οι οποίοι λέγονται **στοιχεία** του πίνακα.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, (2 \ 3 \ 2 \ 4)$$

### Ορισμός

Ένας πίνακας με  $m$  γραμμές και  $n$  στήλες λέγεται  $m \times n$  πίνακας. Τα  $m, n$  λέγονται **διαστάσεις** του πίνακα.

Συμβολισμός:  $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  είναι το σύνολο των  $m \times n$  πινάκων με πραγματικά στοιχεία.

Αντίστοιχα ορίζονται τα  $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{Q})$  και  $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ .

Τα στοιχεία ενός πίνακα  $A$  συμβολίζονται με  $a_{ij}$

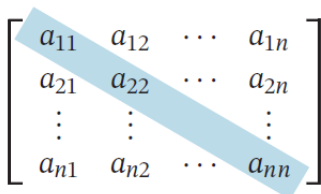
$a_{ij}$  = στοιχείο στην  $i$  γραμμή και  $j$  στήλη

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Γράφουμε  $A = (a_{ij})$  ή  $A = (a_{ik})_{m \times n}$ .

## Ορισμός

Ένας πίνακας  $n \times n$  λέγεται **τετραγωνικός**. Η κύρια διαγώνιος τετραγωνικού πίνακα αποτελείται από στοιχεία της μορφής  $a_{ii}$ .


$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Ορισμός

Δύο πίνακες είναι **ίσοι** όταν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και ίσα στοιχεία, δηλαδή για  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ,

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ για κάθε } i, j.$$

## Παράδειγμα

Για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει  $A = B$  και  $A = C$ ;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

# Πράξεις Πινάκων

- 1 Πρόσθεση κι αφαίρεση: προσθέτουμε/αφαιρούμε στοιχείο προς στοιχείο.

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

Γίνεται μόνο σε πίνακες με ίδιες διαστάσεις.

## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- ② Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα (**βαθμωτός πολλαπλασιασμός**): πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου με τον αριθμό.

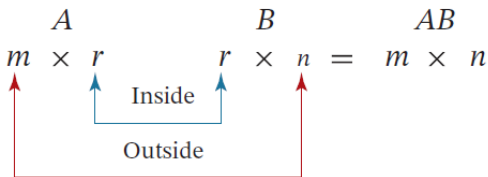
$$cA = (ca_{ij}) \quad (c \in \mathbb{R})$$

## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Δύο πίνακες  $m_1 \times n_1$  και  $m_2 \times n_2$  πολλαπλασιάζονται μόνο όταν  $n_1 = m_2$  και το γινόμενο τους είναι πίνακας  $m_1 \times n_2$ .



Για να βρούμε το στοιχείο  $ij$  του γινομένου πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της  $i$  γραμμής του πρώτου πίνακα με τα στοιχεία της  $j$  στήλης του δεύτερου πίνακα και προσθέτουμε (εσωτερικό γινόμενο).

## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a)  $A + B = B + A$
- (b)  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (c)  $A(BC) = (AB)C$
- (d)  $A(B + C) = AB + AC$
- (e)  $(B + C)A = BA + CA$
- (f)  $A(B - C) = AB - AC$
- (g)  $(B - C)A = BA - CA$
- (h)  $a(B + C) = aB + aC$
- (i)  $a(B - C) = aB - aC$
- (j)  $(a + b)C = aC + bC$
- (k)  $(a - b)C = aC - bC$
- (l)  $a(bC) = (ab)C$
- (m)  $a(BC) = (aB)C = B(aC)$



## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Να γίνει επαλήθευση της ιδιότητας  $(AB)C = A(BC)$ .

Έστω δύο πίνακες  $A, B$ .

- 1 Είναι πιθανόν ο  $AB$  να ορίζεται και ο  $BA$  να μην ορίζεται.
- 2 Είναι πιθανόν οι  $AB, BA$  να ορίζονται αλλά να έχουν διαφορετικές διαστάσεις.
- 3 Είναι πιθανόν οι  $AB, BA$  να ορίζονται, να έχουν ίδιες διαστάσεις αλλά να μην είναι ίσοι.

## Ορισμός

**Μηδενικός πίνακας:**  $\mathbb{O} = \mathbb{O}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$

## Ορισμός

**Ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας:** τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία κυρίας διαγωνίου ίσα με 1 και κάθε άλλοι στοιχείο ίσο με 0.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

- 1  $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
- 2  $A - \mathbb{O} = A$
- 3  $A - A = A + (-A) = \mathbb{O}$
- 4  $\mathbb{O}A = \mathbb{O}$
- 5 Αν  $\lambda A = \mathbb{O}$  τότε  $\lambda = 0$  ή  $A = \mathbb{O}$
- 6  $IA = AI = A$

# Παρατήρηση

Είναι πιθανόν  $A \neq \mathbb{O}$  και  $B \neq \mathbb{O}$  αλλά  $AB = \mathbb{O}$ .

## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$