1.4 Αντίστροφος πίνακας

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει πίνακας B ώστε

$$AB = BA = I.$$

Ο B λέγεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1}.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

Υπάρχουν πίνακες που δεν είναι αντιστρέψιμοι.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ένας πίνακας που δεν είναι αντιστρέψιμος λέγεται **ιδιάζων**.

Θεώρημα (Μοναδικότητα του αντιστρόφου)

Αν B, C είναι αντίστροφοι του A, τότε $B = C$.

Απόδειξη:

Θεώρημα (Αντίστροφος 2×2 πίνακα)

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* $ad - bc \neq 0$. *Ο* A^{-1} *δίνεται από τον τύπο*

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Η απόδειξη παραλείπεται - βασίζεται σε θεωρία οριζουσών (κεφάλαιο 4).

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα (Αντίστροφος γινομένου)

Αν οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι τότε και ο AB είναι αντιστρέψιμος και

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Απόδειξη:

Ορθογώνιοι πίνακες

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **ορθογώνιος** αν

$$AA^T = A^T A = I,$$

δηλαδή $A^{-1} = A^T$.

Αποδεικνύεται ότι μία από τις ισότητες παραπάνω αρκεί.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες

1. Ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ορθογώνιος.
2. Το γινόμενο ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

Δυνάμεις πινάκων

Έστω τετραγωνικός πίνακας A και $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε:

- $A^0 = I$
- $A^n = AA \cdots A \quad (n \text{ παράγοντες})$
- $A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1} \quad (n \text{ παράγοντες})$

Από τον ορισμό προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες.

1. $A^r A^s = A^{r+s}$
2. $(A^r)^s = A^{rs}$

Θεώρημα

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $n \in \mathbb{N}$ τότε:

1. *ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$,*
2. *ο A^n είναι αντιστρέψιμος και $(A^n)^{-1} = A^{-n}$,*
3. *ο λA είναι αντιστρέψιμος (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) και $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.*

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο A^{-3}.

Παρατήρηση

Οι ταυτότητες πινάκων δεν είναι ίδιες με αυτές των πραγματικών αριθμών, διότι ο πολλαπλασιασμός δεν είναι μεταθετικός.

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$