1.6 Μέθοδος Αντιστρόφου Πίνακα

Έστω το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ορίζουμε:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\uparrow \ \textbf{πίνακας του συστήματος}} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Τότε το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στην μορφή

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Αν ο A είναι τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας, τότε:

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \Rightarrow \\
A^{-1}A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \Rightarrow \\
\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Θεώρημα (Μέθοδος Αντιστρόφου Πίνακα)

Αν ο $n \times n$ A είναι αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας τότε το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5\\
2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3\\
x_1 \phantom{{}+5x_2} + 8x_3 &= 17
\end{aligned}
$$

Θεώρημα (Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για έναν $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A.

(I) *Ο A είναι αντιστρέψιμος.*

(II) *Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n.*

(III) *Ο A γράφεται σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.*

(IV) *Το ομογενές γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη).*

(V) *Το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ (την $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$).*

Θεώρημα (Πλήθος λύσεων γραμμικών συστημάτων)

Κάθε γραμμικό σύστημα έχει καμία, ακριβώς μία ή άπειρες λύσεις.

Απόδειξη: