Χώρος στηλών και μηδενοχώρος

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ένας $m \times n$ πίνακας και

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

οι στήλες του A ως διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός

Ο **χώρος στηλών** του A συμβολίζεται με $\mathrm{Col}(A)$ και είναι το σύνολο $\mathrm{Span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$.

Είδαμε ότι το γινόμενο $A\mathbf{x}$ εκφράζει γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A. Άρα:

Το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβαστό.

$\Leftrightarrow$ Η εξίσωση $x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \ldots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b}$ έχει λύση.

$\Leftrightarrow$ Το $\mathbf{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$.

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\} = \mathrm{Col}(A)$.

Θεώρημα

Το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $\mathbf{b} \in \mathrm{Col}(A)$.

Θεώρημα

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. *Για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβαστό.*
2. *Κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.*
3. $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$
4. *Η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή.*

Παρατήρηση

Υπάρχει περίπτωση δύο πίνακες A, B να είναι ισοδύναμοι αλλά $\mathrm{Col}(A) \neq \mathrm{Col}(B)$.

Υπενθύμιση: Ένα ομογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ είτε έχει μοναδική λύση την τετριμμένη ή έχει άπειρες λύσεις. Στην 2η περίπτωση οι λύσεις εκφράζονται ως παραγόμενος χώρος (Span).

Παράδειγμα

$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ορισμός

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ λέγεται **μηδενικός χώρος** ή **μηδενοχώρος** ή **πυρήνας** του A και συμβολίζεται με $\mathrm{Nul}(A)$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$