

Ορισμός

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ του \mathbb{R}^n λέγεται

- **γραμμικά ανεξάρτητο** αν η εξίσωση

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, δηλαδή $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

- **γραμμικά εξαρτημένο** αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, δηλαδή υπάρχουν x_1, x_2, \dots, x_n όχι όλα ίσα με μηδέν ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Να ελέγξετε αν τα σύνολα $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ και $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{w}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$.

- 1 Το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- 2 Η εξίσωση $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.
- 3 Το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση (A ο πίνακας με στήλες $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$).
- 4 $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$

Θεώρημα

Οι στήλες ενός πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

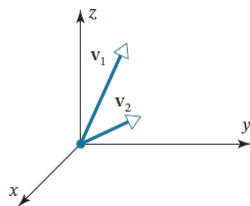
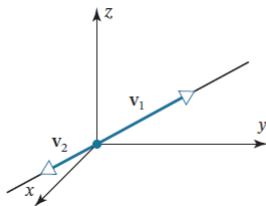
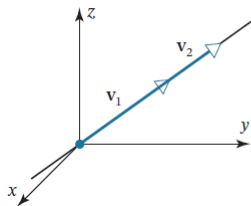
Παράδειγμα

Προσδιορίστε αν το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, όπου

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

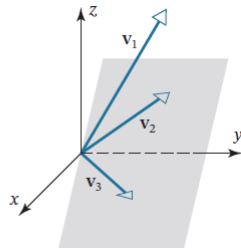
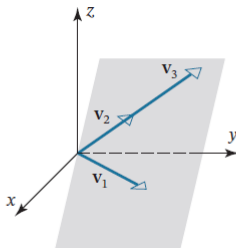
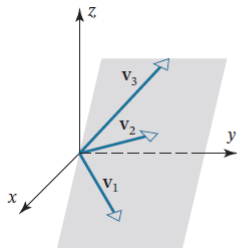
Γεωμετρική ερμηνεία

Δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.



Γεωμετρική ερμηνεία

Δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.



Θεώρημα

Έστω $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ σύνολο διανυσμάτων του \mathbb{R}^n . Αν $r > n$ τότε το σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Απόδειξη:

Παρατήρηση

Αν το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, τότε είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Αν το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε υπάρχει i ώστε $\mathbf{v}_i \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_r\}$.

Παράδειγμα

Επαληθεύστε την παρατήρηση για τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$