

3.3 Μέθοδος Cramer και γεωμετρικές εφαρμογές

Θεώρημα

Αν $Ax = \mathbf{b}$ είναι γραμμικό σύστημα με A έναν $n \times n$ πίνακα με $\det A \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

όπου A_i είναι ο πίνακας που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την i στήλη του A με \mathbf{b} .

Παράδειγμα

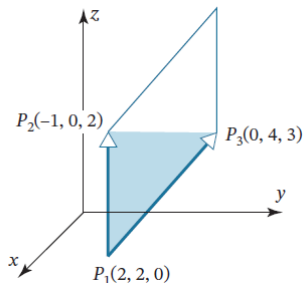
Να λυθεί με τη μέθοδο Cramer το σύστημα

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$

$$-5x_1 + 4x_2 = 8$$

Γεωμετρικές εφαρμογές - I

Αν τα \mathbf{u}, \mathbf{v} είναι διανύσματα στον \mathbb{R}^2 , τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα \mathbf{u}, \mathbf{v} είναι ίσο με $|\det A|$ όπου $A = [\mathbf{u} \ \mathbf{v}]$.

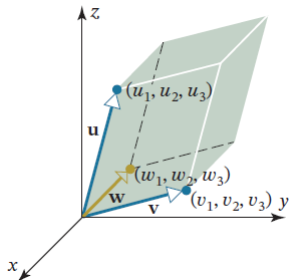


Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές $(-2, -2)$, $(0, 3)$, $(4, -1)$, $(6, 4)$.

Γεωμετρικές εφαρμογές - II

Αν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι διανύσματα στον \mathbb{R}^3 , τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι ίσος με $|\det A|$ όπου $A = [\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]$.



Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα διανύσματα $\mathbf{u} = (2, -6, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 2, -4)$.

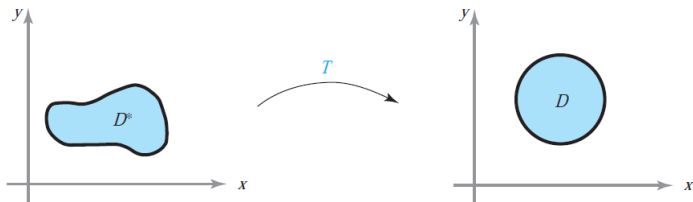
Γεωμετρικές εφαρμογές - III

- Έστω $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση με κανονικό πίνακα A . Αν S είναι χωρίο στον \mathbb{R}^2 τότε

$$\text{Εμβαδόν } T(S) = |\det A| \text{ Εμβαδόν } S$$

- Έστω $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με κανονικό πίνακα A . Αν S είναι χωρίο στον \mathbb{R}^3 τότε

$$\text{Όγκος } T(S) = |\det A| \text{ Όγκος } S$$



Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.