4.2 Διαγωνοποίηση

Ορισμός

Αν A, B είναι δύο $n \times n$ πίνακες, λέμε ότι ο A είναι **όμοιος** με τον B αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$A = PBP^{-1}.$$

Παρατήρηση: Αν ο A είναι όμοιος με τον B τότε κι ο B είναι όμοιος με τον A.

Ιδιότητες

Θεώρημα

Αν οι A, B *είναι όμοιοι* $n \times n$ *πίνακες, τότε* $\det A = \det B$.

Απόδειξη:

Ιδιότητες

Θεώρημα

Αν οι A, B είναι όμοιοι $n \times n$ πίνακες, τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές πολλαπλότητες.

Απόδειξη:

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα

Για έναν $n \times n$ πίνακα A τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
2. *Ο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Αν $A = PDP^{-1}$ όπου D διαγώνιος πίνακας, τότε οι στήλες του P είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A και τα στοιχεία του D είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του A.

Απόδειξη

Θεώρημα

Ένας $n \times n$ πίνακας με n διακριτές ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος.

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι ο $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα

Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Θεώρημα

Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος με $A = PDP^{-1}$, τότε $A^k = PD^kP^{-1}$ για κάθε ακέραιο $k \geqslant 0$.

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ο A^{13}.

Υπενθύμιση: Αν το λ_0 είναι ιδιοτιμή του A, η αλγεβρική πολλαπλότητα του λ_0 είναι η δύναμη του παράγοντα $(\lambda - \lambda_0)$ στην εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ορισμός

Έστω A τετραγωνικός πίνακας και λ_0 ιδιοτιμή του A. Η **γεωμετρική πολλαπλότητα** του λ_0, $\gamma(\lambda_0)$, είναι η διάσταση του ιδιοχώρου $E_{\lambda_0} = \mathrm{Nul}(A - \lambda_0 I)$.

Θεώρημα

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας.

1. *Για κάθε ιδιοτιμή του A, η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής πολλαπλότητας.*
2. *Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα.*
3. *Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το άθροισμα των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με n.*

Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.