Κεφάλαιο 5 - Ορθοκανονικοποίηση και μέθοδος Gram-Schmidt

Ορισμός

Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, το γινόμενο $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ συμβολίζεται με $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ και ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Αν $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, τότε

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Θεώρημα

Έστω $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
3. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geqslant 0$ *και* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathbf{u} = 0$

Ορισμός

Αν $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, το **μήκος** ή **νόρμα** του $\mathbf{v}$ είναι η ποσότητα $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. Αν $\|\mathbf{v}\| = 1$ τότε το $\mathbf{v}$ λέγεται **μοναδιαίο**.

- Αν $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, τότε $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$.
- $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$
- $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{v}\|, \ \lambda \in \mathbb{R}$
- Το διάνυσμα $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ είναι πάντα μοναδιαίο και η διαδικασία εύρεσής τους ονομάζεται **κανονικοποίηση**.

Παράδειγμα

Να κανονικοποιηθεί το διάνυσμα $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Έστω $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}\}$ όπου $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί βάση του W που να περιέχει μόνο μοναδιαία διανύσματα.

Ορισμός

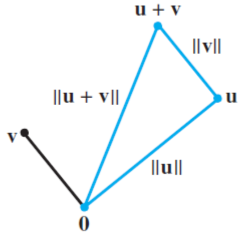
Δυό διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ λέγονται **κάθετα** ή **ορθογώνια** αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Θεώρημα (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Για δύο κάθετα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, *ισχύει ότι*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 .$$

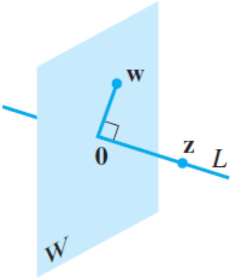
Απόδειξη:



Ορισμός

Έστω W υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

1. Ένα διάνυσμα $z \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **ορθογώνιο** ή **κάθετο** στο W αν είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του W.
2. Το σύνολο $W^{\perp}$ όλων των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο W λέγεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του W.



Παράδειγμα

Έστω $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$. Αν το $\mathbf{u}$ είναι κάθετο στα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ τότε το $\mathbf{u}$ είναι κάθετο στο W.

Παρατήρηση

Αν το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, τότε το $W^\perp$ είναι επίσης υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.