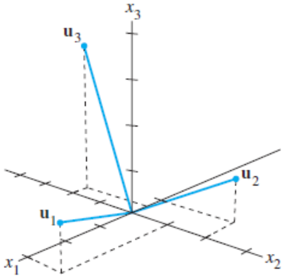
5.2 Ορθογώνια σύνολα και προβολές

Ορισμός

Ένα σύνολο $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **ορθογώνιο** αν τα στοιχεία του είναι κάθετα ανά δύο, δηλαδή $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ για κάθε $1 \leqslant i, j \leqslant r$ με $i \neq j$



Παράδειγμα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα

Αν το $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ *είναι ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^n$, *τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη:

Ορισμός

Μια βάση του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **ορθογώνια βάση** αν είναι ορθογώνιο σύνολο.

Θεώρημα

Έστω $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ *ορθογώνια βάση υποχώρου* W *του* $\mathbb{R}^n$. *Τότε κάθε* $\mathbf{y} \in W$ *μπορεί να γραφτεί ως* $\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_r \mathbf{u}_r$ *όπου*

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα

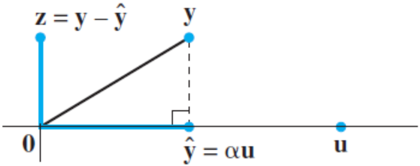
Να δειχθεί ότι τα $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$ αποτελούν ορθογώνια βάση για τον $\mathbb{R}^3$ και να εκφραστεί το $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}$ ως γραμμικός συνδυασμός τους.

Ορισμός

Έστω $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Η **προβολή του y πάνω στο u** είναι το διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}.$$

Το $z = y - \hat{y}$ ονομάζεται **κάθετη συνιστώσα του y στο u**.



Παράδειγμα

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ορισμός

- Ένα ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **ορθοκανονικό** αν κάθε διάνυσμα που περιέχει είναι μοναδιαίο.
- Μια ορθογώνια βάση υποχώρου W του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **ορθοκανονική** αν κάθε διάνυσμα που περιέχει είναι μοναδιαίο.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι τα $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

Θεώρημα

Για έναν $m \times n$ πίνακα U, $U^T U = I_n$ αν και μόνο αν οι στήλες του είναι ορθογώνιο σύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη:

Θεώρημα

Έστω $m \times n$ *πίνακας* U *με* $U^T U = I_n$ *και* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

1. $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
2. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$
3. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Έστω $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$. Να δειχθεί ότι $U^T U = I_2$ και ότι $\|U\mathbf{x}\| = \|x\|$.

Θεώρημα (Θεώρημα Προβολής)

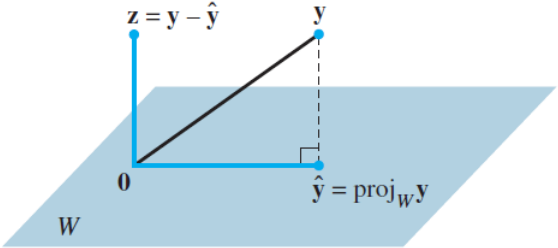
Έστω W υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο στην μορφή

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z},$$

όπου $\hat{\mathbf{y}} \in W$ και $\mathbf{z} \in W^{\perp}$.
Αν $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ορθογώνια βάση του W, τότε

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r}\mathbf{u}_r.$$

Το $\hat{\mathbf{y}}$ λέγεται **ορθογώνια προβολή** του $\mathbf{y}$ στο W και συμβολίζεται με $\mathrm{proj}_W \mathbf{y}$.


$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$
$\mathbf{y}$
$\mathbf{0}$
$\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_W \mathbf{y}$
W

Απόδειξη

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να γραφτεί το $\mathbf{y}$ ως άθροισμα διανύσματος του $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ και διανύσματος του $W^{\perp}$.

Παρατήρηση

Αν $\mathbf{y} \in W$ και $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ορθογώνια βάση του W τότε $\hat{y} = \mathrm{proj}_W \mathbf{y} = \mathbf{y}$.

Θεώρημα

Αν $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ *ορθοκανονική βάση του υποχώρου* W *του* $\mathbb{R}^n$*, τότε για κάθε* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\mathrm{proj}_W \mathbf{y} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 + \ldots + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_r.$$

Αν $U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_r \end{bmatrix}$*, τότε* $\mathrm{proj}_W \mathbf{y} = UU^T \mathbf{y}$*.*